ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ

ПОДОБНО-ИЗМѢНЯЕМАГО ТѢЛА.

Д. Н. Зейлигера,

Приватъ-доцента Императорскаго Казанскаго Университета.



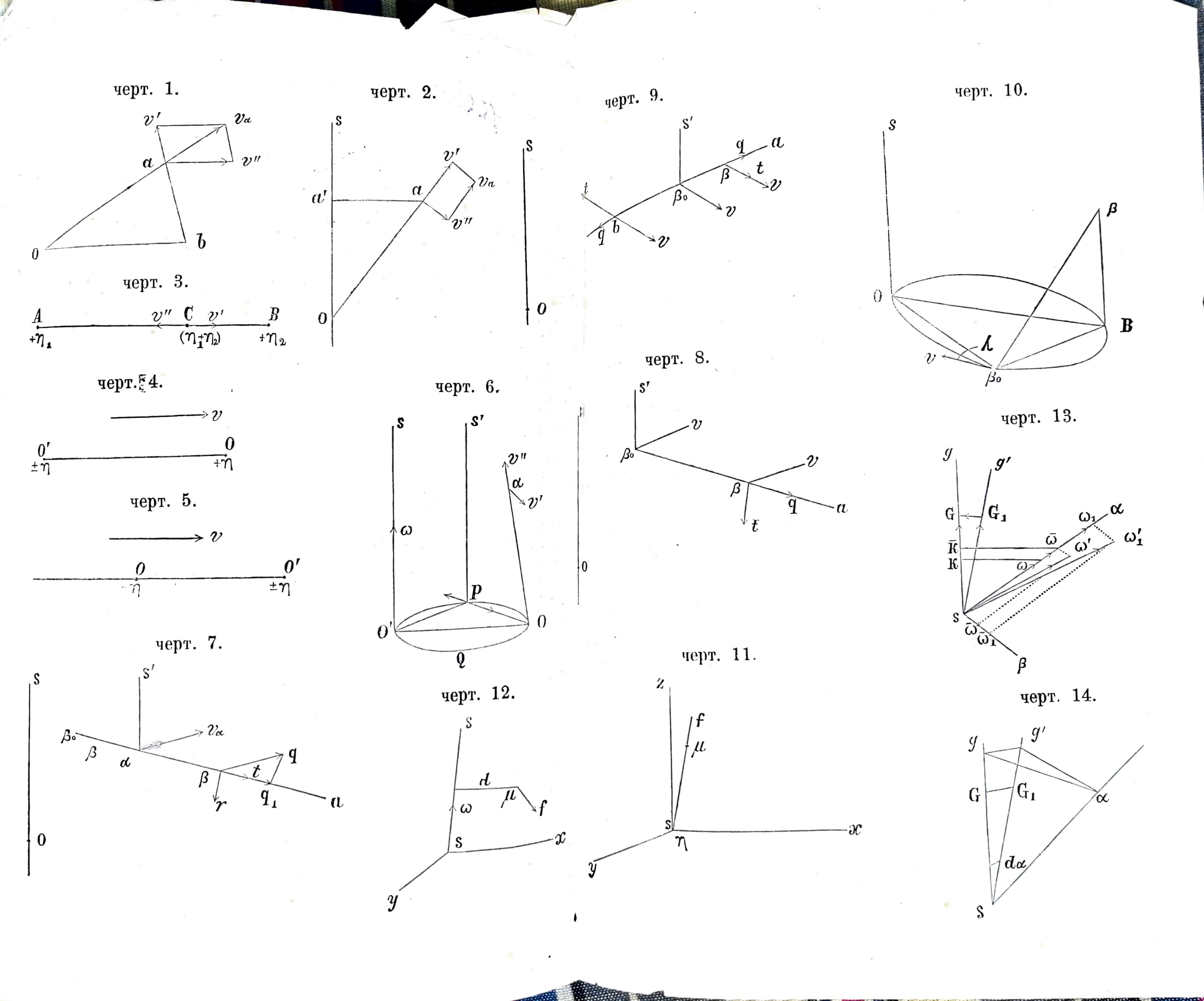


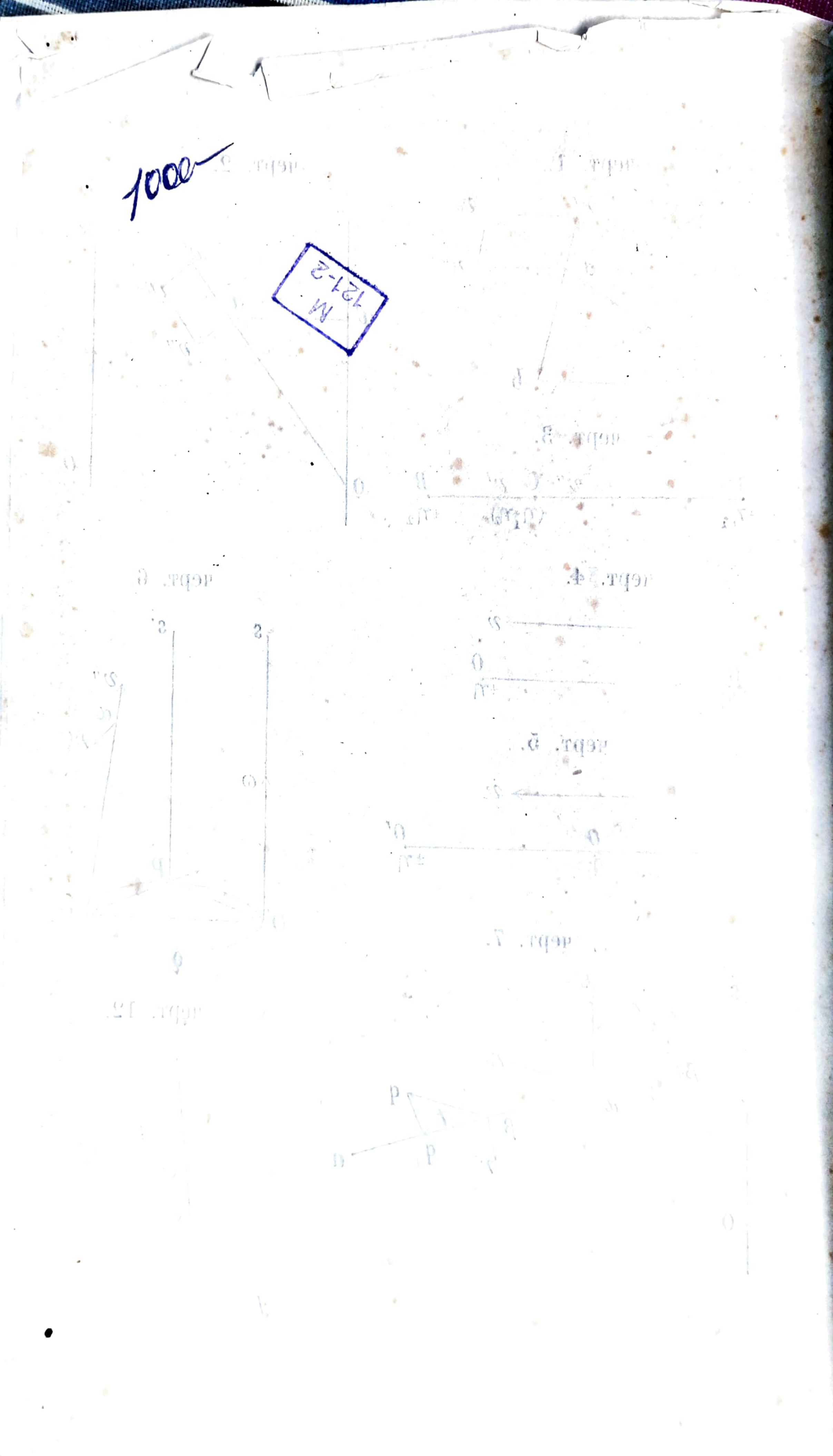
КАЗАНЬ.

Типографія Императорскаго Университета.

1892.





черт. 1.
черт. 2.
черт. 3.
черт. 4.
черт. 5.
черт. 6.
черт. 7.
черт. 8.
черт. 9.
черт. 10.
черт. 11.
черт. 12.
черт. 13.
черт. 14.


1000
M 121-2

Печатано съ разрѣшенія физико-математическаго факультета. 28 мая 1892 г.

Деканъ *Д. Дубяго.*

Введенiе.

Среди измѣняемыхъ системъ, строго опредѣленныхъ геометрически или аналитически, существуетъ одна, представляющая особенный интересъ для теоретической механики. Это—подобно-измѣняемое тѣло, ближе всѣхъ системъ стоящее по своимъ геометрическимъ свойствамъ къ твердому тѣлу. На основанiи этого одного обстоятельства можно предвидѣть тѣсную связь между механическими свойствами этихъ двухъ тѣлъ. Предпринятый въ такомъ направленiи цѣлый рядъ изслѣдованiй, дѣйствительно, установилъ эту связь, но лишь для кинематики и статики. Въ настоящемъ сочиненiи я имѣю въ виду пойти дальше и распространить аналогiю механическихъ свойствъ подобно-измѣняемаго и твердаго тѣлъ на динамику. Совершенное отсутствiе работъ по динамикѣ подобно-измѣняемаго тѣла позволяетъ мнѣ разсчитывать на снисходительное отношенiе читателя къ моему труду.

Все сочиненiе распадается на три части.

Въ первой я изучаю простѣйшiя возможныя движенiя подобно-измѣняемаго тѣла и даю законы сложенiя этихъ движенiй (§ I—III). Изъ общаго движенiя тѣла мнѣ пришлось выдѣлить т. н. *лучистое расширенiе* [1]), разумѣя подъ нимъ такого рода движенiе, при которомъ точки тѣла движутся по радiусамъ, исходящимъ изъ нѣкотораго центра. Оказалось, что самое общее (элементарное) движенiе тѣла состоитъ изъ совокупности лучистаго расширенiя и вращенiя вокругъ оси, про-

---

[1]) См. Механику подобно-измѣняемой системы. Одесса, 1890—91, Вып. III, стр. 76. «Сборникъ» Изъ области геометрiи и механики. Одесса 1891, стр. 13.

ходящей чрезъ центръ расширенія. Это — переводъ на языкъ кинематики извѣстной теоремы Шаля [1]): два положенія подобно-измѣняемаго тѣла имѣютъ двойную прямую и на ней двойную точку. Законы сложенія простыхъ движеній дали мнѣ возможность нарисовать (§ IV и V) полную картину непрерывнаго движенія тѣла. Въ послѣднемъ (VI) § изучается, въ видѣ приложенія тѣхъ же законовъ, распредѣленіе скоростей точекъ въ данный моментъ. Хотя этотъ вопросъ принадлежитъ къ числу наиболѣе разработанныхъ въ литературѣ, однако новый методъ привелъ, какъ слѣдовало ожидать, къ новымъ результатамъ. Для характеристики всей первой части скажу, что не только рѣшеніе, но и самая постановка большей части вопросовъ появляются здѣсь впервые.

Во второй части, изложивъ теорію моментовъ инерціи (§ I) и напомнивъ главные законы статики тѣла (§ II), я перехожу къ изученію зависимости между мгновенными силами и вызываемымъ ими мгновеннымъ движеніемъ (§ III). Это изслѣдованіе приводитъ (§ IV) къ геометрическому рѣшенію задачи Poinsot для подобно-измѣняемаго тѣла. Вотъ результаты этого изслѣдованія.

1) Центръ инерціи тѣла движется равномѣрно по прямой.

2) Центральный эллипсоидъ деформируется, оставаясь подобнымъ самому себѣ, и движется такъ, что первоначальный его видъ катится безъ скольженія по нѣкоторой плоскости, сохраняющей неизмѣнное направленіе.

3) Слагающая угловой скорости по направленію, перпендикулярному къ предыдущей плоскости, измѣняется обратно пропорціонально квадрату линейнаго расширенія тѣла.

4) Квадратъ линейнаго расширенія тѣла есть квадратичная функція отъ времени.

Третья часть заключаетъ въ себѣ аналитическую теорію разсматриваемаго тѣла. Уравненія движенія послѣдняго выводятся (§ I и II) изъ принципа Даламбера. Число этихъ уравненій равно 7. Три изъ нихъ соотвѣтствуютъ принципу сохраненія движенія центра инерціи, 3 другихъ — принципу площадей и имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{d(Ap)}{dt} = (B-C)qr + G_x,$$

---

[1]) См. примѣчаніе къ § V первой части.

$$\frac{d(Bq)}{dt} = (C - A)rp + G_y,$$

$$\frac{d(Cr)}{dt} = (A - B)pq + G_z.$$

Аналогія между извѣстными уравненіями Эйлера и этими очевидна. Разница заключается въ томъ, что въ послѣднихъ величины A, B и C—непостоянны, но зависятъ отъ времени.

Седьмое уравненію соотвѣтствуетъ принципу виріала.

Полное интегрированіе этихъ уравненій дается далѣе (§ III и IV) для двухъ случаевъ: 1) когда на тѣло вовсе не дѣйствуютъ непрерывныя силы (задача Poinsot) и 2) когда на тѣло дѣйствуетъ сила тяжести.

Сочиненіе заканчивается (§ V) исторіей и указателемъ литературы.

Изъ самаго плана сочиненія вытекаетъ, что идеальнымъ образцомъ для меня послужила классическая работа Poinsot: Théorie nouvelle de la rotation des corps. Я далекъ отъ мысли, что возможно хоть какое-нибудь сравненіе моего труда съ работой, составляющей гордость нашего вѣка. Но необходимо подчеркнуть сходство въ планѣ и *тожество* въ ходѣ мысли, по крайней мѣрѣ, первыхъ двухъ частей настоящаго сочиненія съ Théorie nouvelle. Меня побуждаетъ къ этому нетолько чувство справедливости, но и глубокое убѣжденіе, что въ Théorie nouvelle, въ ея духѣ и методѣ, есть ключъ къ динамикѣ всѣхъ измѣняемыхъ системъ. Можетъ быть, малые успѣхи въ этой области объясняются тѣмъ, что взгляды Poinsot на механику не были достаточно развиты позднѣйшей литературой. Я буду счастливъ, если эта первая, сознаюсь, слабая попытка подобнаго развитія вызоветъ другіе, болѣе совершенные труды въ томъ же направленіи.



Часть I.

КИНЕМАТИКА.

§ I. Опредѣленіе. Основныя свойства движенія.

Подобно-измѣняемымъ тѣломъ называется такая система точекъ, послѣдовательныя положенія которой представляютъ рядъ подобныхъ между собою фигуръ.

Это опредѣленіе заключаетъ въ себѣ, какъ легко видѣть, слѣдующія, основныя свойства движенія подобно-измѣняемаго тѣла:

Свойство I. Во все время движенія точки, лежавшія первоначально на прямой линіи или на плоскости, остаются на прямой или на плоскости.

Иными словами, *прямыя и плоскости тѣла во все время движенія остаются прямыми и плоскостями.*

Свойство II. Во все время плоскіе и тѣлесныя углы тѣла остаются неизмѣнными по величинѣ.

Свойство III. Если ϱ_0 — разстояніе двухъ точекъ тѣла въ моментъ t_0, — ϱ разстояніе тѣхъ же точекъ въ моментъ t, то отношеніе

$$A)\quad \frac{\varrho}{\varrho_0} = \varphi$$

зависитъ только отъ времени.

Величина φ называется *линейнымъ расширеніемъ* тѣла за промежутокъ времени $(t - t_0)$.

§ II. Возможныя движенія подобно-измѣняемаго тѣла.

I. Пусть S—какое-нибудь положеніе тѣла. Всякое иное положеніе S' должно быть, по опредѣленію, подобнымъ фигурѣ S. Но частнымъ случаемъ подобія двухъ фигуръ является ихъ конгруэнтность. Отсюда мы заключаемъ, что фигуры S и S' могутъ быть конгруэнтны.

Мы получили, слѣдовательно:

Предложеніе I [1]). Подобно-измѣняемое тѣло можетъ обладать всѣми движеніями твердаго тѣла.

Слѣдствіе. Однимъ изъ возможныхъ движеній подобно-измѣняемаго тѣла является винтъ Пуансо или цилиндрическій винтъ [2]).

На основаніи предложенія I мы будемъ говорить о поступательномъ движеніи и вращеніи подобно-измѣняемаго тѣла, подразумѣвая, что послѣднее при этомъ не деформируется.

II. *Предложеніе II* [3]). Подобно-измѣняемое тѣло можетъ обладать движеніемъ, при которомъ одна точка O тѣла остается неподвижной, а остальныя точки a переходятъ по прямымъ Oa въ положенія a'. Отношеніе $\frac{Oa}{Oa'}$ остается при этомъ одинаковымъ для всѣхъ точекъ a.

Это предложеніе прямо слѣдуетъ изъ того, что фигура, составленная изъ точекъ a, подобна фигурѣ, составленной изъ точекъ a', въ силу неизмѣнности отношенія $\frac{Oa}{Oa'}$.

Назовемъ *лучистымъ расширеніемъ* движеніе, о которомъ идетъ рѣчь; точка O—*центръ*, отношеніе $\frac{aa'}{Oa}=p$ — постоянное

---

[1]) *Примѣчаніе I.* Это предложеніе справедливо для всякой измѣняемой системы, если законъ, которымъ связаны отдѣльныя ея положенія, не исключаетъ конгруэнтности послѣднихъ.

[2]) *Примѣчаніе II.* Винтомъ Пуансо мы называемъ совокупность вращенія и поступательнаго движенія параллельно оси вращенія. Названіе *цилиндрическій* вызвано тѣмъ, что точки тѣла при винтовомъ движеніи послѣдняго описываютъ винтовыя линіи, лежащія на *цилиндрахъ*, общая ось которыхъ совпадаетъ съ осью винта.

[3]) *Примѣчаніе.* Содержаніе этого § и слѣдующаго было предметомъ V статьи сборника «Изъ области геометріи и механики». Одесса, 1891 г., стр. 12—24.

для всѣхъ точекъ a—есть *величина* расширенія. Величина p положительна, если направленія Oa и aa' совпадаютъ; — отрицательна въ противномъ случаѣ. Отрицательное расширеніе будемъ иногда называть *лучистымъ сжатіемъ*.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать лишь *элементарныя* расширенія. Полагая, слѣдовательно:

$$Oa = \varrho,\ aa' = v_a dt,\ p = \eta dt,$$

найдемъ для скорости v_a точки a:

$$\text{B)}\quad v_a = \varrho \cdot \eta$$

Здѣсь η—*скорость* элементарнаго расширенія. Величина η отрицательна въ случаѣ элементарнаго лучистаго сжатія.

Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что, если скорость η положительна, то скорость v_a направлена по *лучу* Oa; въ противномъ случаѣ направленіе скорости v_a совпадаетъ съ aO.

Отсюда и изъ формулы B) выводимъ:

1) Прямыя и плоскости, проходящія чрезъ центръ расширенія, остаются неподвижными.

2) Скорость всякой точки пропорціональна ея разстоянію отъ центра. Скорость центра равна нулю.

3. Скорость η расширенія равна скорости точки, отстоящей отъ центра на растояніи, равномъ единицѣ.

Эти простыя свойства вполнѣ обрисовываютъ лучистое расширеніе. Найдемъ связь между линейнымъ расширеніемъ φ и скоростью η.

Для этого замѣтимъ, что въ формулѣ B)

$$v_a = \frac{d\varrho}{dt}$$

слѣдовательно,

$$\text{C)}\quad \eta = \frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{dt},$$

т. е., η есть *отнесенное къ единицѣ длины и времени удлиненіе прямой* ϱ. Мы видимъ, что η совпадаетъ съ *коэффиціен-*

томъ расширенія ε подобно-измѣняемаго тѣла, опредѣленнымъ у П. Сомова [1]).

Изъ формулы A) получаемъ:

$$\frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{dt}=\frac{1}{\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt},$$

слѣдовательно,

$$\text{D)}\quad \eta=\frac{1}{\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt};\quad \varphi=e^{\int\eta dt}$$

это—искомая связь между φ и η. Здѣсь e—основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ.

Пусть O, a и b — центръ расширенія η и двѣ точки тѣла (черт. 1). Разложимъ скорость v_a по линіи ab и параллельно Ob на слагающія v' и v''. Очевидно,

$$\frac{v'}{ab}=\frac{v''}{Ob}=\frac{v}{Oa}=\eta,$$

въ силу формулы B). Слѣдовательно,

$$v'=ab.\ \eta,\ v''=Ob.\ \eta=v_b,$$

въ силу той-же формулы B). Мы видимъ, что скорость точки a слагается изъ двухъ скоростей. Первой изъ нихъ точка a обладала бы въ томъ случаѣ, если бъ центромъ расширенія η служила точка b; вторая — одинакова для всѣхъ точекъ a и равна скорости точки b.

Мы получили такимъ образомъ:

Предложеніе III. Лучистое расширеніе со скоростью η вокругъ центра O можетъ быть замѣнено лучистымъ расширеніемъ η вокругъ новаго центра b, если въ тоже время придать тѣлу поступательную скорость, геометрически равную скорости новаго центра при первоначальномъ движеніи.

Мы будемъ говорить, что расширеніе изъ O перенесено въ b. На основаніи предыдущаго можно сказать:

---

[1]) Кинематика подобно-измѣняемой системы двухъ измѣреній. Спб. 1885, стр. 2 и 3, формула (2).

Переносъ расширенія изъ одного центра въ другой вызываетъ поступательную скорость, равную скорости новаго центра при первоначальномъ расширеніи.

III. Назовемъ *коническимъ винтомъ* совокупность вращенія со скоростью ω вокругъ оси s и расширенія со скоростью η:

$$\eta = p\omega,$$

вокругъ точки O той-же прямой. Точка O—*центръ*, прямая s—*ось*, а величина p — *параметръ* винта. Винтъ будемъ обозначать символомъ $O(p,s)$.

Предложеніе IV. Коническій винтъ есть возможное движеніе подобно-измѣняемаго тѣла.

Это предложеніе есть слѣдствіе I и II предложеній.

Найдемъ скорость v_a какой-нибудь точки тѣла, имѣющаго конически-винтовое движеніе. Скорость v_a есть результирующая двухъ скоростей. Изъ нихъ первая v' (черт. 2) направлена по лучу Oa и равна:

$$v' = Oa.\ \eta = Oa\ .\ p\omega.$$

Этой скоростью обладаетъ точка a въ силу расширенія η въ O. Вторая скорость v'' равна:

$$v'' = aa'\ .\ \omega,$$

если a'—ортогональная проекція точки a на ось винта. Скорость v'' перпендикулярна къ плоскости $(s,\ a)$ и вызвана вращеніемъ ω вокругъ s. Замѣчая, что v' и v'' взаимно-перпендикулярны, и полагая:

$$\angle aOa' = \varphi,\ \ Oa = \varrho,$$

найдемъ:

$$\text{E)}\ \ v^2 = v'^2 + v''^2 = \varrho^2\omega^2(p^2 + sn^2\varphi);\ \ tg(v,\varrho) = \frac{v''}{v'} = \frac{sn\varphi}{p}.$$

Вышесказанное и формулы E) даютъ:

1. Скорости точекъ *винтоваго луча* Oa параллельны между собой и пропорціональны разстояніямъ точекъ отъ центра винта. Скорость центра равна нулю.

2. Скорости точекъ поверхности прямого круглаго конуса, вершина котораго въ центрѣ винта, а ось совпадаетъ съ осью послѣдняго, касаются поверхности конуса и образуютъ одинаковые углы съ производящими послѣдняго. Эти свойства вполнѣ обрисовываютъ коническій винтъ и объясняютъ его названіе.

Перенесемъ винтовое расширеніе η въ точку a, а скорость вращенія ω на ось s', проходящую чрезъ a параллельно оси s. (черт. 2). Первое вызоветъ поступательную скорость тѣла, геометрически равную v' (Предл. III). Второе, какъ извѣстно, вызоветъ поступательную скорость, геометрически равную v''. Мы получили такимъ образомъ коническій винтъ $a(p,s')$, къ которому присоединяются поступательныя скорости v' и v''. Но послѣднія суть слагающія скорости v_a точки a; слѣдовательно, доказано:

Предложеніе V. Коническій винтъ $O(p,s)$ можно замѣнить коническимъ винтомъ $a(p,s')$, имѣющимъ тотъ же параметръ и то же направленіе оси, но другой центръ, если въ тоже время придать тѣлу поступательную скорость, геометрически равную скорости новаго центра при первоначальномъ движеніи $O(p,s)$.

§ III. Сложеніе движеній.

Здѣсь мы укажемъ законы, управляющіе сложеніемъ *одновременныхъ элементарныхъ* движеній.

I. Отмѣтимъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе VI. Совокупность двухъ расширеній вокругъ общаго центра эквивалентна нулю (покою), если скорости расширеній отличаются только знаками.

Предложеніе VII. Совокупность произвольнаго числа расширеній вокругъ общаго центра эквивалентна одному расширенію вокругъ того же центра. Скорость результирующаго расширенія равна алгебрической суммѣ скоростей складываемыхъ движеній.

Оба эти предложенія очевидны.

Положимъ теперь, что тѣло испытываетъ одновременно два расширенія η_1 и η_2 вокругъ центровъ A и B (черт. 3). Произвольная точка C прямой AB обладаетъ въ силу обоихъ движеній скоростями v' и v'', опредѣляемыми по формуламъ:

$$v' = AC.\eta_1, \quad v'' = BC.\eta_2.$$

Допустимъ, что величины η_1 и η_2 одинаковаго знака. Въ этомъ случаѣ скорости v' и v'' будутъ направлены въ прямо-противоположныя стороны лишь для точекъ отрѣзка AB. На немъ, слѣдовательно, находится такая точка C_1, для которой

$$v' = v'',$$

т. е., эта точка останется въ покоѣ. Послѣднему условію можно дать видъ:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\eta_2}{\eta_1}.$$

Перенесемъ расширенія изъ A и B въ точку C_1. На основаніи предложенія III мы получимъ два расширенія вокругъ C_1 со скоростями η_1 и η_2 и поступательныя скорости v' и v''. Совокупность первыхъ двухъ движеній эквивалентна (Предл. VII) расширенію вокругъ C_1, скорость η котораго равна:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2.$$

Совокупность вторыхъ двухъ движеній эквивалентна, по предыдущему, нулю. Если бы знаки скоростей η_1 и η_2 были различны, то это отразилось бы лишь на положеніи точки C_1 и величинѣ η. Легко видѣть, что, если только не имѣетъ мѣста равенство:

$$\eta_1 + \eta_2 = o,$$

то точка C_1 лежитъ внѣ отрѣзка AB, ближе къ тому центру, которому соотвѣтствуетъ большая по абсолютной величинѣ скорость η_1 или η_2, причемъ снова:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\eta_2}{\eta_1}.$$

Если $\eta_1 + \eta_2 = o$, то точка C_1 удаляется въ безконечность.

Все вышесказанное даетъ намъ:

Предложеніе VIII. Совокупность двухъ расширеній со ско-

ростями η_1 и η_2 вокругъ центровъ A и B эквивалентна расширенію со скоростью η вокругъ третьяго центра C_1. Скорость η равна алгебрической суммѣ скоростей η_1 и η_2; а центръ C_1 лежитъ на прямой AB и дѣлитъ ее внутренне или внѣшне въ обратномъ отношеніи величинъ η_1 и η_2. Первое имѣетъ мѣсто, если эти скорости одинаковаго знака; второе—въ противномъ случаѣ.

Если величины η_1 и η_2 отличаются только знаками, то совокупность соотвѣтствующихъ расширеній нельзя замѣнить однимъ расширеніемъ.

Назовемъ *кинематической парой* совокупность двухъ расширеній вокругъ несовпадающихъ центровъ A и B въ томъ случаѣ, если скорости η_1 и η_2 расширеній отличаются только знаками. Отрѣзокъ $AB=d$—*плечо*, произведеніе $d.\eta$—плеча на общую абсолютную величину скоростей η_1 и η_2—*моментъ* пары. Послѣднюю будемъ обозначать символомъ $(AB)\eta$, гдѣ A — центръ расширенія, B — центръ сжатія.

Предложеніе IX. Кинематическая пара эквивалентна поступательной скорости v, параллельной плечу пары и направленной отъ центра расширенія къ центру сжатія. Скорость v равна моменту пары.

Доказательство. Пусть $(AB)\eta$—данная пара, Перенесемъ расширеніе η изъ A въ B. Это даетъ намъ (Пред. III) скорость расширенія η вокругъ B и поступательную скорость $v=AB.\eta$, причемъ v параллельно AB. Но совокупность расширенія и сжатія со скоростями $+\eta$ и $-\eta$ въ B эквивалентна нулю (Предл. VI), слѣдовательно, останется лишь поступательная скорость $v.Q.E.D$ [1])

II. Займемся теперь сложеніемъ расширенія съ поступательнымъ движеніемъ. Пусть O — центръ расширенія со скоростью η, v — поступательная скорость (черт. 4). Проведемъ чрезъ O прямую параллельно v и на ней отложимъ отрѣзокъ OO' въ сторону, противоположную направленію r, такъ, чтобы

$$OO'.\eta=v.$$

[1]) *Примѣчаніе*. Другое доказательство дано мной въ вышеупомянутомъ сборникѣ. (См. стр. 17).

Въ O' придадимъ тѣлу два расширенія: со скоростями $+\eta$ и $-\eta$. Совокупность этихъ движеній эквивалентна нулю (Предл. VI). Но теперь у насъ 3 скорости: 1) поступательная скорость v, 2) поступательная скорость v' пары $(OO')\eta$ и 3) скорость расширенія η вокругъ O'. По предложенію IX,

$$v' = OO'\eta = v$$

въ силу предыдущей формулы. Кромѣ того, направленія v и v' прямо противоположны. Слѣдовательно, эти скорости взаимноуничтожатся; остается лишь расширеніе η въ O'.

Если O—центръ сжатія—η, то слѣдуетъ отложить (чер. 5) отрѣзокъ OO' въ ту сторону, куда направлена скорость v, такъ, чтобы снова

$$OO'.\eta = v.$$

Разсуждая, какъ и выше, найдемъ, что совокупность поступательной скорости v и скорости сжатія η въ O эквивалентна скорости сжатія η въ O'.

Все предыдущее даетъ:

Предложеніе X. Совокупность поступательной скорости v и скорости расширенія η съ центромъ O эквивалентна скорости расширенія η въ O'. Прямая OO' параллельна v, причемъ

$$OO'.\eta = v.$$

Направленія OO' и v одинаковы, если η отрицательно,— прямо противоположны въ противномъ случаѣ.

Предложеніе XI Совокупность n расширеній со скоростями η_1, $\eta_2 . . \eta_n$ вокругъ центровъ O_1 O_2,. . O_n эквивалентна одному расширенію со скоростью η или поступательной скорости. Первое имѣетъ мѣсто, если сумма $(\eta_1 + \eta_2 . . . + \eta_n)$ не равна нулю. Въ этомъ случаѣ центръ результирующаго расширенія совпадаетъ съ центромъ *массъ* η_1, η_2, . . η_n, помѣщенныхъ въ точкахъ O_1 O_2, . . O_n соотвѣтственно. Кромѣ того,

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + . . + \eta_n.$$

Второе имѣетъ мѣсто, если

$$\eta_1 + \eta_2 + . . + \eta_n = 0.$$

Доказательство. Перенесемъ всѣ расширенія въ произвольную точку P тѣла. Это даетъ намъ двѣ системы скоростей: 1) систему скоростей расширеній η_1, $\eta_2..\eta_n$ въ P и 2) систему поступательныхъ скоростей v_1, $v_2,..v_n$, соотвѣтственно равныхъ скоростямъ точки P, которыми обладаетъ послѣдняя въ силу отдѣльныхъ движеній η. (Предл. III) Первая система эквивалентна (предл. VII) одному расширенію со скоростью $\eta = = \eta_1 + \eta_2 + .. + \eta_n$ въ P; вторая—поступательной скорости v—геометрической суммѣ скоростей v_1, v_2, v_n. Соединяя η съ v, получимъ расширеніе η въ точкѣ P', построеніе которой указано въ предложеніи X. Но скорость v_i можно разсматривать, какъ моментъ перваго порядка массы η_i въ A_i относительно точки P. Далѣе, по построенію, v—геометрическая сумма величинъ r_i. Кромѣ того, изъ того же предложенія X слѣдуетъ, что v—моментъ перваго порядка массы η въ P' относительно точки P. Отсюда мы заключаемъ, что P' совпадаетъ съ центромъ массъ η_i, помѣщенныхъ въ точкахъ A_i. Въ самомъ дѣлѣ, центръ массъ опредѣляется тѣмъ свойствомъ, что, если въ немъ сосредоточить массу $\eta = \eta_1 + \eta_2 + .. + \eta_n$, то моментъ перваго порядка массы η относительно любой точки P есть геометрическая сумма такихъ же моментовъ массъ η_i относительно той-же точки P.

Если сумма $\eta_1 + \eta_2 + .. + \eta_n$ равна нулю, то переносъ всѣхъ расширеній въ P даетъ лишь поступательную скорость v.*Q.E.D.*

III. Пусть теперь s—ось вращенія ω, O—не лежащій на s центръ расширенія η, (черт. 6). Въ силу обоихъ движеній какая-нибудь точка a тѣла обладаетъ двумя скоростями. Первая изъ нихъ v' вызвана скоростью вращенія ω и, слѣдовательно, перпендикулярна къ плоскости (s,a); вторая v'' вызвана расширеніемъ η и направлена по Oa. Такъ какъ Oa не лежитъ въ плоскости (s,a), если только точка a лежитъ внѣ плоскости (s,o), то уголъ (v',v'') можетъ имѣть всевозможныя значенія. Точки a, для которыхъ этотъ уголъ равенъ нулю или двумъ прямымъ, должны быть проекціями центра O па плоскости (s,a). Геометрическое мѣсто этихъ проекцій есть окружность круга, плоскость котораго перпендикулярна къ s, а діаметромъ служитъ разстояніе OO' точки O отъ прямой s. Пусть $OPO'Q$—эта окружность. Діаметръ OO' дѣлитъ ее на двѣ части. Въ точкахъ первой OPO' скорости v' и v'' прямо противоположны; въ точкахъ второй OQO' эти скорости направлены

въ одну и ту же сторону. Опредѣлимъ на первой дугѣ точку P, для которой $v'=v''$. Замѣчая, что

$$v'=O'P.\omega,\ v''=OP.\eta,$$

найдемъ для опредѣленія точки P:

$$\frac{O'P}{OP}=\frac{\eta}{\omega}$$

Отсюда мы заключаемъ, что точка P единственна. Эта точка останется неподвижной въ силу обоихъ движеній тѣла. Проведемъ чрезъ P прямую s' параллельно s и перенесемъ вращеніе ω съ s на s', а расширеніе η изъ O въ P. Первый переносъ даетъ намъ вращеніе ω вокругъ оси s' и поступательную скорость, геометрически равную скорости v' точки P; результатомъ втораго переноса будетъ расширеніе со скоростью η въ P и поступательная скорость, геометрически равная скорости v'' той-же точки.

Замѣчая, что скорости v' и v'' взаимно уничтожатся, заключаемъ:

Предложеніе XII. Совокупность скорости вращенія ω вокругъ оси s и скорости η расширенія вокругъ точки O, не лежащей на оси, эквивалентна коническому винту. Центръ P послѣдняго лежитъ на окружности, діаметромъ которой служитъ разстояніе точки O отъ оси s, а плоскость перпендикулярна къ s. Ось результирующаго винта параллельна s, а параметръ равенъ отношенію $\frac{\eta}{\omega}$.

Введя параметръ винта: $p=\frac{\eta}{\omega}$ и замѣчая, что (черт. 6)

$$\frac{O'P}{OP}=tgO'OP,$$

получимъ въ силу предыдущей формулы:

Предложеніе XIII. Плоскость (o,s') образуетъ съ плоскостью (o,s) уголъ, tg'ъ котораго равенъ параметру коническаго винта.

Изъ предложенія XII вытекаетъ:

Слѣдствіе I. Совокупность расширенія и цилиндрическаго винта эквивалентна коническому винту.

Это слѣдуетъ изъ того, что цилиндрическій винтъ есть совокупность вращенія и поступательной скорости. Складывая послѣднюю съ расширеніемъ и полученное расширеніе съ вращеніемъ, мы убѣдимся въ справедливости предложенія.

Слѣдствіе II. Совокупность любаго числа расширеній, поступательныхъ скоростей и вращеній вообще эквивалентна коническому винту.

Доказательство. Совокупность всѣхъ расширеній вообще эквивалентна одному расширенію. Совокупность же всѣхъ поступательныхъ скоростей и вращеній, какъ извѣстно, эквивалентна вообще винту цилиндрическому. Если мы теперь сложимъ этотъ винтъ съ результирующимъ расширеніемъ, то придемъ къ коническому винту (Предл. XII, слѣд. I.)

§ IV. Движеніе тѣла, имѣющаго неподвижную точку.

Полученные результаты даютъ возможность изслѣдовать непрерывное движеніе подобно—измѣняемаго тѣла. Здѣсь мы разсмотримъ тотъ частный случай движенія послѣдняго, когда одна точка остается неподвижной. Общее движеніе составляетъ предметъ слѣдующаго §.

Предложеніе XIV. Элементарное движеніе подобно измѣняемаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку, есть коническій винтъ, центръ котораго въ неподвижной точкѣ.

Доказательство. Пусть O—неподвижная точка, S_1 и S_2—два смежныхъ положенія тѣла, l_1 и (l_1+dl_1)—два значенія величины l линейнаго отрѣзка послѣдняго въ положеніяхъ S_1 и S_2. По опредѣленію, фигуры S_1 и S_2 подобны между собой; слѣдовательно, отношеніе $\frac{dl_1}{l_1}=\eta dt$ есть величина, не зависящая отъ положенія и величины отрѣзка l. Придадимъ тѣлу въ положеніи S_1 скорость расширенія η вокругъ O. Новое положеніе S' тѣла будетъ, очевидно, фигурой, конгруэнтной фигурѣ S_2. Двѣ эти фигуры имѣютъ общую точку O; слѣдовательно, изъ положенія S' въ S_2 тѣло можно перевести помощью нѣкоторой скорости вращенія ω вокругъ опредѣленной прямой, проходящей чрезъ точку O. Но совокупность скорости расширенія η вокругъ O и скорости вращенія ω во-

кругъ оси, проходящей чрезъ O, мы назвали коническимъ винтомъ (§ II, III); слѣдовательно, предложеніе доказано.

Пусть S_1, S_2, S_3,..—рядъ отдѣльныхъ, безконечно-близкихъ положеній тѣла, O—неподвижная точка послѣдняго. Переходъ изъ положенія S_1 въ S_2 совершается, по предыдущему, помощью коническаго винта $O(p,s)$. Точно также изъ S_2 въ положеніе S_3 тѣло переходитъ помощью коническаго винта $O(p',s')$ и т. д. Мы получимъ такимъ образомъ рядъ коническихъ винтовъ, благодаря которому тѣло переходитъ изъ начальнаго положенія въ конечное, пройдя чрезъ всѣ промежуточныя положенія. Такъ какъ послѣднія, по предположенію, непрерывно слѣдуютъ другъ за другомъ, то оси s винтовъ будутъ послѣдовательными производящими конуса (s), вершина котораго въ неподвижной точкѣ O.

Изъ сказаннаго вытекаетъ:

Предложеніе XV. Непрерывное движеніе подобно-измѣняемаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку O, заключается въ непрерывномъ рядѣ коническихъ винтовъ вокругъ производящихъ опредѣленнаго конуса (s), вершина котораго совпадаетъ съ неподвижной точкой тѣла.

Вернемся къ случаю отдѣльныхъ положеній S_1, S_2,.. послѣдняго. Въ то время, какъ оно переходитъ изъ положенія S_1 въ S_2, опредѣленная прямая C тѣла совпадаетъ съ осью s винта $O(p,s)$, причемъ точки прямой C движутся вдоль послѣдней. Во время перехода изъ положенія S_2 въ S_3 новая прямая C' тѣла остается неподвижной и т. д. Прямыя C,C',... имѣющія общую точку O тѣла, суть производящія нѣкотораго, подобно-измѣняемаго конуса (C) тѣла съ вершиной O. Движеніе конуса (C) по конусу (s) (см. выше) происходитъ слѣдующимъ образомъ. Въ каждый моментъ оба конуса имѣютъ общую производящую (Cs). За безконечно-малый промежутокъ времени движущійся конусъ (C) деформируется, вращаясь вокругъ C и расширяясь вокругъ вершины O, до тѣхъ поръ, пока слѣдующая производящая C' не совпадетъ съ слѣдующей производящей s' неподвижнаго конуса. Въ силу сказаннаго въ § I, (свойство II) уголъ (C,C') неизмѣняется, слѣдовательно, онъ равенъ углу (s,s').

Это даетъ намъ:

Предложеніе XVI. Непрерывное движеніе подобно-измѣняемаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку, заключается въ

томъ, что опредѣленный, непрерывно расширяющійся, конусъ (C) тѣла катится безъ скольженія по другому неподвижному конусу (s). Неподвижная точка есть общая вершина конусовъ (C) и (s) и центръ послѣдовательныхъ расширеній движущагося конуса (C).

Примѣчаніе. Изъ предыдущаго вытекаетъ, что движеніе тѣла вполнѣ извѣстно, если даны конусы (C) и (s), элементы, опредѣляющіе движеніе по (s) *неизмѣняемаго* конуса (C), и, кромѣ того, скорость расширенія послѣдняго въ функціи отъ времени.

§ V. Общее движеніе подобно-измѣняемаго тѣла.

Предложеніе XVII. Общее элементарное движеніе подобно-измѣняемаго тѣла есть коническій винтъ.

Доказательство. Пусть S_1 и S_2—два смежныхъ положенія тѣла, l_1 и (l_1+dl_1) — два значенія величины линейнаго отрѣзка l послѣдняго въ этихъ двухъ положеніяхъ. Отношеніе $\frac{dl_1}{l_1}=\eta dt$ не зависитъ отъ величины и положенія отрѣзка l, такъ какъ фигуры S_1 и S_2 подобны. Придадимъ тѣлу въ положеніи S_1 скорость расширенія η вокругъ какой-нибудь точки. Новое положеніе S' будетъ, очевидно, фигурой, конгруэнтной фигурѣ S_2. Слѣдовательно, существуетъ такой цилиндрическій винтъ, при помощи котораго можно будетъ перевести тѣло изъ положенія S' въ положеніе S_2. Но совокупность расширенія η и цилиндрическаго винта эквивалентна (предл. XII, слѣд. I) коническому винту. *Q. E. D.*

Примѣчаніе. Въ 1830 г. великій геометръ Шаль предложилъ безъ доказательства слѣдующую теорему:

Два положенія подобно-измѣняемаго тѣла имѣютъ общую прямую и на ней общую точку [1]).

---

[1]) Chasles. «Note sur les propriétés générales de deux corps semblables entre eux etc.» Bulletin des sciences math. de Férussac. 1830 г. Въ текстѣ дана сокращенная формулировка результатовъ Шаля. Замѣчу, что геометрическое доказательство послѣднихъ читатель найдетъ въ Мех. под. изм. системы. Вып. III, стр. 86—90.

Легко видѣть, что изъ этой теоремы, если ее веревести на языкъ кинематики, вытекаетъ, какъ слѣдствіе, только что доказанное предложеніе. Какъ *результатъ* кинематическій, послѣднее является здѣсь впервые.

Перейдемъ къ непрерывному движенію тѣла. Пусть S_1, S_2, S_3,...—рядъ отдѣльныхъ положеній послѣдняго, непрерывно слѣдующихъ одно за другимъ; O (p, s), O_1 (p_1, s_1),...—рядъ коническихъ винтовъ, переносящихъ тѣло изъ положенія S_1 въ S_2, изъ S_2 въ S_3 и т. д. Геометрическое мѣсто осей s винтовъ есть нѣкоторая линейчатая поверхность (S), пространство геометрическое мѣсто центровъ O есть нѣкоторая кривая (O), лежащая на (S).

Предложеніе XVIII. Непрерывное движеніе подобно-измѣняемаго тѣла заключается въ непрерывномъ рядѣ коническихъ винтовъ, осями которыхъ служатъ послѣдовательныя производящія линейчатой поверхности (S), а центрами—послѣдовательныя точки кривой O, лежащей на (S).

Поверхность (S) назовемъ неподвижнымъ *аксоидомъ*, кривую (O)—неподвижной *централой*.

Пусть снова S_1, S_2, S_3—непрерывный рядъ положеній тѣла. Въ то время, какъ послѣднее переходитъ изъ положенія S_1 въ S_2, опредѣленная прямая (C) тѣла совпадаетъ съ осью s винта $O(p,s)$, причемъ точки прямой C движутся вдоль послѣдней, кромѣ опредѣленной точки ω, совпадающей съ центромъ O винта и остающейся неподвижной въ теченіи разсматриваемаго промежутка времени. При переходѣ изъ S_2 въ S_3 новая прямая C' тѣла, совпадающая съ осью s' слѣдующаго винта O_1 $(p_1\ s_1)$, остается неподвижной, а на ней—новая точка ω' и т. д. Геометрическое мѣсто въ тѣлѣ прямыхъ C, C', есть линейчатая, подобно-измѣняющаяся поверхность (C), точекъ ω — кривая (ω). Движеніе (C) по неподвижному аксоиду (S) и кривой (ω) по неподвижной централѣ (O) происходитъ слѣдующимъ образомъ. Въ каждый моментъ поверхности (S) и (C) имѣютъ общую производящую (SC), а кривыя (O) и (ω) общую точку $(O\omega)$ на послѣдней. За безконечно-малый промежутокъ времени поверхность (C) деформируется, вращаясь вокругъ S и расширяясь вокругъ O, до тѣхъ поръ, пока слѣдующая производящая C' и точка послѣдней ω' не совпадутъ съ производящей S' и ея точкой O' соотвѣтственно. Мы видимъ, что элементы OO' и $\omega\omega'$ кривыхъ (O) и (ω) равны въ этотъ мо-

ментъ, а (S) и (C) имѣютъ двѣ общія производящія, безконечно близкія другъ къ другу. Съ этой точки зрѣнія можно сказать, что (C) и (ω) катятся *безъ скольженія* по (S) и (0) соотвѣтственно.

Все вышесказанное даетъ намъ:

Предложеніе XIX. Непрерывное общее движеніе подобно-измѣняемаго тѣла заключается въ томъ, что линейчатая подобно-измѣняющаяся поверхность (C) тѣла и на ней кривая (ω) катятся безъ скольженія по опредѣленной линейчатой-же поверхности (S) и кривой (0), лежащей на (S).

§ VI. Теорія скоростей.

Въ предыдущемъ § мы видѣли, что общее элементарное движеніе подобно-измѣняемаго тѣла есть коническій винтъ. Общіе законы, управляющіе скоростями отдѣльныхъ точекъ тѣла въ такомъ движеніи, были указаны въ § II. Здѣсь мы займемся болѣе обстоятельнымъ изученіемъ распредѣленія этихъ скоростей, имѣя въ виду главнымъ образомъ дать приложенія того же § II.

I. Пусть $0\ (p, s)$ — коническій винтъ, a—какая-нибудь прямая тѣла. (Черт. 7). Перенесемъ винтъ въ точку α послѣдней. Вмѣсто винта $0\ (p, s)$ получимъ (предл. V) совокупность винта $\alpha\ (p, s)$, ось s' котораго параллельна s, и поступательной скорости v_α точки α. Скорость v_β какой-нибудь точки β прямой a будетъ слагаться изъ трехъ скоростей: 1) скорости q, геометрически равной v_a,—2) скорости r, вызванной въ β вращеніемъ ω вокругъ s',—и 3) скоростью t, вызванной расширеніемъ η въ α. Проекція на прямую a слагающей q одинакова для всѣхъ точекъ β послѣдней; обозначаемъ эту проекцію чрезъ q_1. Слагающая t направлена по a, причемъ

$$t = \alpha\beta.\ \eta.$$

Наконецъ проекція на a скорости r равна нулю. Въ самомъ дѣлѣ, скорость r перпендикулярна къ плоскости (s', a); слѣдовательно, она перпендикулярна къ прямой a. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что проекція на прямую a скорости v_β пред-

ставляется суммой $q_1 + t$. Скорость q_1 имѣетъ вполнѣ опредѣленное направленіе. Относительно скорости t замѣтимъ слѣдующее. Точка α дѣлитъ прямую a на двѣ части Скорости t, соотвѣтствующія точкамъ β одной изъ нихъ, направлены въ одну сторону съ q_1; въ точкахъ β второй — скорости t и q_1 имѣютъ прямо-противоположныя направленія. Здѣсь, слѣдовательно, проекція v_β имѣетъ видъ:

$$q_1 - t$$

Въ этой части прямой a всегда найдется точка β_o, для которой:

$$q_1 - t = q_1 - \alpha\beta_o \eta = o.$$

Дѣйствительно, это уравненіе даетъ: $\alpha\beta_o = \frac{q_1}{\eta}$; а такъ какъ η не равно нулю, то $\alpha\beta_o$ вообще не равно безконечности. Мы доказали такимъ образомъ:

Предложеніе XX. Между точками прямой a всегда существуетъ одна β_o, скорость которой перпендикулярна къ прямой a. [1]).

Точку β_o назовемъ *центромъ* прямой a.

Предложеніе XXI. Проекціи на прямую a скоростей ея точекъ β пропорціональны разстояніямъ $\beta\beta_o$ этихъ послѣднихъ отъ центра β_o прямой a.

Доказательство. Пусть β_o—центръ прямой a (черт. 7). Послѣдняя дѣлится точкой α на двѣ части. Если точка β лежитъ въ той части, въ которой лежитъ β_o, то, какъ было выше показано, проекція на a скорости v_β имѣетъ видъ:

$$q_1 - t = q_1 - \alpha\beta.\ \eta;$$

---

[1]) *Примѣчаніе*. Въ твердомъ тѣлѣ это предложеніе вообще не имѣетъ мѣста. *Если же есть одна точка β_o, то всѣ точки имѣютъ тоже свойство*. Это предложеніе настолько основнаго характера, что на немъ одномъ Маннгеймъ построилъ свою извѣстную работу: Etude sur le déplacement d'une figure de forme invariable etc. Mémoires des savants étrangers, T. XX.

Но $q_1 = \alpha\beta_0 . \eta$;

слѣдовательно,

$$q_1 - t = (\alpha\beta_0 - \alpha\beta)\ \eta = \beta_0\beta .\ \eta.$$

Если же точки β_0 и β лежатъ по обоимъ сторонамъ точки α, то проекція скорости v_β будетъ: $q_1 + t = q_1 + \alpha\beta .\ \eta$. Вставляя снова значеніе q, найдемъ:

$$q_1 + t = (\alpha\beta_0 + \alpha\beta)\ \eta = \beta\beta_0 .\ \eta .\ Q.\ E.\ D.$$

II. Пусть β_0 — центръ прямой a (черт. 8). Перенесемъ винтъ въ точку β_0. Это даетъ намъ совокупность винта $\beta_0(p,s')$ и поступательной скорости v точки β_0. Скорость v_β какой-нибудь точки β прямой a слагается изъ 3 скоростей: 1) скорости v, перпендикулярной, по предположенію, къ прямой a; 2) скорости q, направленной по a и вызванной расширеніемъ η въ точкѣ β_0, и 3) скорости t, вызванной вращеніемъ ω вокругъ оси s', параллельной s и проходящей чрезъ β_0. Скорость t перпендикулярна къ плоскости (S',a) и, слѣдовательно, къ a. Является вопросъ, нѣтъ-ли на прямой a точекъ β, скорости которыхъ v_β направлены по a. Такія точки назовемъ полюсами прямой a. Для существованія полюсовъ, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы въ нихъ равнодѣйствующая скоростей v и t равнялась нулю. Но эти скорости во всѣхъ точкахъ β прямой a имѣютъ одинаковыя направленія, какъ это видно изъ вышесказаннаго; кромѣ того, одна изъ нихъ v одинакова для всѣхъ точекъ β. Отсюда мы заключаемъ, что для существованія полюсовъ прежде всего необходимо, чтобы уголъ между скоростями v и t равнялся 2 d. Но скорость t перпендикулярна къ плоскости (s', a), — скорость же v, по предположенію, перпендикулярна къ a: слѣдовательно, v должна быть перпендикулярна къ прямой s', что даетъ намъ:

Предложеніе XXII. Центры прямыхъ, которыя могутъ имѣть полюсы, имѣютъ скорости, перпендикулярныя къ оси винта.

Пусть β_0—точка системы, скорость v которой перпендикулярна къ оси винта $O(p,s)$ (черт. 9). Прямая a, проходящая чрезъ β_0 и перпендикулярная къ v, можетъ, въ силу по-

слѣдняго предложенія, обладать полюсами. Докажемъ, что она, дѣйствительно, имѣетъ одинъ и только одинъ полюсъ. Для этого, какъ и выше, перенесемъ винтъ $O(p,s)$ въ β_0. Скорость v_β какой-нибудь точки β прямой a слагается изъ трехъ скоростей: 1) скорости v, 2) скорости q, направленной по a и вызванной расширеніемъ η въ a, и 3) скорости t, вызванной вращеніемъ ω вокругъ оси s', параллельной оси s и проходящей чрезъ β_0. Скорость t перпендикулярна къ плоскости (s', a). Если d—разстояніе точки β отъ S', то

$$t = d\omega = \beta\beta_0 . \ \omega sn\alpha,$$

гдѣ α—уголъ (s, a)

Скорость v, перпендикулярная къ s, перпендикулярна и къ s'. Кромѣ того, v перпендикулярна и къ a; слѣдовательно, v также перпендикулярна къ плоскости (s', a). Точка β_0 дѣлитъ прямую a на 2 части. Скорости t въ одной изъ нихъ направлены въ одну сторону съ v, во второй — эти скорости направлены въ прямо-противоположныя стороны. Въ послѣдней части прямой a выберемъ точку b такъ, чтобы

$$v = t = b\beta_0 . \ \omega sn\alpha.$$

Точка b—искомый полюсъ прямой a. Замѣчая, что изъ послѣдней формулы вытекаетъ:

$$b\beta_0 = \frac{v}{\omega sn\alpha}$$

заключаемъ:

Предложеніе XXIII. Прямая a, скорость центра которой перпендикулярна къ оси винта, всегда имѣетъ одинъ только полюсъ. Полюсъ прямой a, параллельной оси винта, лежитъ въ безконечности.

Пусть $O\ (p, s)$—винтъ (ч. 2). Скорость v какой-нибудь точки β слагается изъ скорости v', направленной по лучу $O\beta$, и скорости v'', перпендикулярной къ плоскости (s, β) (§ II), причемъ

$$v' = O\beta . p\omega, \ v'' = O\beta . \ sn\varphi . \ \omega, \ v = O\beta . \ \omega \sqrt{p^2 + sn^2\varphi},$$

если φ—уголъ $sO\beta$. Такъ какъ скорость v'' перпендикулярна къ s, то

$$vcs\ (v,s) = v'cs\ (v',s) = v'cs\varphi,$$

откуда

$$cs(v,s) = \frac{pcs\varphi}{\sqrt{p^2 + sn^2\varphi}}$$

Изъ этой формулы получаемъ: $cs(v,\ s) = o$, если $\varphi = 90°$. Сопоставляя этотъ результатъ съ только что доказаннымъ предложеніемъ, заключаемъ:

Предложеніе XXIV. Центры прямыхъ, имѣющихъ полюсъ, лежатъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси винта въ центрѣ послѣдняго.

Эту плоскость назовемъ *центральной* плоскостью.

Пусть $O(p,s)$—винтъ, β—какая-нибудь точка, βB—перпендикуляръ къ центральной плоскости. (ч. 10). Положимъ, что точка α послѣдней есть центръ прямой $\alpha\beta$. Для этого, по опредѣленію, нужно, чтобы скорость v_α была перпендикулярна къ $\alpha\beta$. Но скорость эта, перпендикулярная къ оси s, будетъ перпендикулярна и къ βB; слѣдовательно, она перпендикулярна къ плоскости $\alpha\beta B$. Отсюда вытекаетъ, что уголъ $(v_\alpha, \alpha B)$ равенъ d. Но уголъ $(v_\alpha, O\alpha) = \lambda$ опредѣляется изъ формулы:

$$tg\lambda = \frac{1}{p} \text{ (формула } E, \ \S\ \text{II)}$$

слѣдовательно,

$$tg(O\alpha B) = p,$$

чѣмъ доказывается:

Предложеніе XXV. Центры α прямыхъ, проходящихъ чрезъ одну и ту же точку B и имѣющихъ полюсы, лежатъ на дугѣ окружности. Хордой дуги служитъ прямая OB, соединяющая центръ винта съ проекціей точки β на центральную плоскость.

Слѣдствіе. Прямыя, обладающія полюсами и проходящія чрезъ одну и туже точку, суть производящія ко-

нуса втораго порядка, сѣченія котораго съ плоскостями, параллельными центральной, суть круги.

Предложеніе XXVI. Прямыя, обладающія полюсами и лежащія въ одной и той же плоскости P, обертываютъ коническое сѣченіе.

Доказательство. Прежде всего напомнимъ, что не всякая прямая плоскости P можетъ имѣть полюсъ. Чрезъ какую-нибудь точку B плоскости P проходятъ лишь двѣ такихъ прямыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, эти прямыя должны лежать въ P и быть производящими конуса втораго порядка, вершина котораго въ B. Отсюда мы заключаемъ, что изъ каждой точки B могутъ быть проведены 2 касательныхъ къ линіи, обертываемой прямыми плоскости P, имѣющими полюсы. Слѣдовательно, эта линія—коническое сѣченіе.

Изъ послѣднихъ 2 предложеній вытекаетъ:

Предложеніе XXVII. Скорости точекъ подобно-измѣняемаго тѣла въ каждый моментъ образуютъ своими направленіями линейный комплексъ втораго порядка [1]).

На этомъ мы закончимъ изслѣдованія настоящаго параграфа. Повторяемъ, что насъ не столько интересовалъ чрезвычайно - разработанный вопросъ о распредѣленіи скоростей точекъ подобно-измѣняемаго тѣла, сколько новый и простой методъ рѣшенія того-же вопроса. Замѣчу въ заключеніе, что не новы: предложенія XXVI, XXVII и первая половина слѣдствія предложенія XXV.

---

[1]) Burmester. Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik. B. XXIII, стр. 124—125. Методъ этого автора не имѣетъ ничего общаго съ изложеннымъ въ текстѣ.

ЧАСТЬ II.

ДИНАМИКА (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРІЯ).

§ I. Теорія моментовъ инерціи.

Здѣсь мы займемся динамикой подобно-измѣняемаго тѣла, причемъ массы точекъ послѣдняго будемъ считать *положительными*. Изслѣдованіямъ настоящаго параграфа предпошлемъ 2 слѣдующихъ предложенія:

Предложеніе I. Центромъ инерціи подобно-измѣняемаго тѣла во все время движенія служитъ одна и та же точка тѣла.

Доказательство. Разсмотримъ два положенія A и B тѣла M. Пусть a_1, a_2, $a_3 \ldots$, b_1, b_2, b_3, .. — соотвѣтствующія положенія точекъ μ_1, μ_2, $\mu_3 \ldots$ тѣла, массы которыхъ суть m_1, m_2, m_3,... Точки $(a_1, b_1)\ldots$ назовемъ *гомологичными* точками фигуръ A и B. Построимъ центръ a_0 инерціи фигуры A. Для этого на отрѣзкѣ $a_1\ a_2$ опредѣляемъ точку α_{12} такъ, чтобы

$$1)\quad \frac{a_1\alpha_{12}}{\alpha_{12}a_2}=\frac{m_2}{m_1}.$$

Затѣмъ на отрѣзкѣ $\alpha_{12}\ a_3$ находимъ точку α_{123}, для которой:

$$\frac{\alpha_{12}\alpha_{123}}{\alpha_{123}a_3}=\frac{m_3}{m_1+m_2},$$

Продолжая такимъ образомъ, пока не исчерпаемъ всѣхъ точекъ a, мы придемъ къ точкѣ a_0. Опредѣлимъ теперь точ-

ки $\beta_{12}, \beta_{123}, \ldots b_0$ фигуры B, гомологичныя точкамъ $a_{12}, a_{123}, \ldots a_0$. Такъ какъ фигуры A и B подобны, то точка β_{12} должна лежать на отрѣзкѣ $b_1\ b_2$, точка β_{123} на отрѣзкѣ $\beta_{12}\ b_3$, и т. д. Кромѣ того,

$$\frac{a_1 a_{12}}{a_{12} a_2} = \frac{b_1 \beta_{12}}{\beta_{12} b_2}; \quad \frac{a_{12} a_{123}}{a_{123} a_3} = \frac{\beta_{12} \beta_{123}}{\beta_{123} b_3}; \ldots$$

Сопоставляя эти равенства съ предыдущими, находимъ:

$$\frac{b_1 \beta_{12}}{\beta_{12} b_2} = \frac{m_2}{m_1}; \quad \frac{\beta_{12} \beta_{123}}{\beta_{123} b_3} = \frac{m_3}{m_1 + m_2}, \ldots$$

т. е., точка b_0, замыкающая рядъ $\beta_{12}, \beta_{123}, \ldots$ опредѣляется такимъ же рядомъ построеній, какъ центръ инерціи фигуры B [1]). *Q.E.D.*

Предложеніе II. Главными осями инерціи подобно-измѣняемаго тѣла во все время движенія служатъ однѣ и тѣже прямыя тѣла.

Доказательство. Разсмотримъ положенія A и B тѣла. Пусть S, Sx, Sy и Sz—центръ и главныя оси инерціи тѣла въ положеніи A, S', $S'x'$, $S'y'$, $S'z'$ — гомологичныя точки и прямыя фигуры B. По предложенію I, S' — центръ инерціи фигуры B. Прямыя Sx, Sy и Sz, какъ извѣстно, взаимноперпендикулярны. Въ силу подобія фигуръ A и B взаимноперпендикулярны и прямыя $S'x'$, $S'y'$ и $S'z'$. Отнесемъ тѣло въ положеніи A къ осямъ Sx, Sy и Sz, а въ положеніи B— къ осямъ $S'x'$, $S'y'$ и $S'z'$. Пусть x, y, z—координаты точки a

---

[1]) *Примѣчаніе.* При доказательствѣ предложенія мы воспользовались лишь двумя свойствами подобно-измѣняемаго тѣла: 1) прямая линія остается прямой и 2) ряды точекъ на двухъ гомологичныхъ прямыхъ подобны между собой. Такъ какъ этими же свойствами обладаетъ однородно-измѣняемое тѣло (affin—veränderlich) и только оно, то мы заключаемъ, что доказанное предложеніе имѣетъ мѣсто и въ однородно-измѣняемомъ тѣлѣ. Отсюда вытекаетъ, что динамика измѣняемыхъ системъ, болѣе общихъ, чѣмъ однородно-измѣняемая, должна значительно отличаться отъ динамики твердаго тѣла. Слѣдовательно, если имѣютъ въ виду обобщить не только кинематику, но и динамику твердаго тѣла, то далѣе однородно-измѣняемаго тѣла не слѣдуетъ заходить. Авт.

тѣла съ массой m въ первомъ положеніи и относительно первой системы осей, x', y', z' — координаты той же точки, но во второмъ положеніи тѣла и относительно второй системы осей. Легко видѣть, что изъ подобія фигуръ A и B и гомологичности обѣихъ системъ осей вытекаетъ:

$$\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=\frac{\varrho'}{\varrho},$$

гдѣ ϱ' и ϱ—разстоянія точки a отъ центра инерціи въ положеніяхъ B и A. Введя величину φ линейнаго расширенія за время перехода изъ A въ B, найдемъ:

$$\text{A)}\ x'=x\varphi,\ y'=y\varphi,\ z'=z\varphi,\ \varrho'=\varrho\varphi.$$

Но, такъ какъ прямыя Sx, Sy и Sz—оси инерціи тѣла въ положеніи A, то

$$\Sigma myz=\Sigma mzx=\Sigma mxy=0,$$

слѣдовательно,

$$\Sigma my'z'=\varphi^2\Sigma mxy=0,\ \Sigma mz'x'=\varphi^2\Sigma mzx=0,\ \Sigma mx'y'=\varphi^2\Sigma mxy=0,$$

т. е., прямыя Sx', Sy' и Sz' суть оси инерціи тѣла въ положеніи $B.Q.E.D.$

О главныхъ моментахъ инерціи. Вернемся къ фигурамъ A и B и къ осямъ x, y, z, x', y', z'. Если чрезъ P, Q и R, P', Q' и R' обозначимъ главные моменты инерціи тѣла въ положеніяхъ A и B, то въ силу доказаннаго предложенія

$$P=\Sigma m(y^2+z^2),\ Q=\Sigma m(z^2+x^2),\ R=\Sigma m(x^2+y^2)$$

$$P'=\Sigma m(y'^2+z'^2),\ Q'=\Sigma m(z'^2+x'^2),\ R'=\Sigma m(x'^2+y'^2).$$

Слѣдовательно, въ силу соотношеній A),

$$\text{B)}\ P'=\varphi^2P,\ Q'=\varphi^2Q,\ R'=\varphi^2R.$$

О центральномъ эллипсоидѣ. Разсмотримъ центральный эллипсоидъ инерціи (S) тѣла въ двухъ положеніяхъ A и B

послѣдняго. Какъ извѣстно, уравненія эллипсоида (S) будутъ въ первомъ положеніи

$$1)\quad Px^2+Qy^2+Rz^2=H$$

—во второмъ

$$2)\quad P'x'^2+Q'y'^2+R'z'^2=H,$$

гдѣ H—величина постоянная.

Пусть l_1 — прямая фигуры A, проходящая чрезъ центръ инерціи S. Гомологичная прямая l_2 фигуры B должна проходить чрезъ точку S', причемъ эти прямыя образуютъ одинаковыя углы съ осями x, y, z, x', y', z' соотвѣтственно. Обозначая чрезъ α, β и γ cs'ы этихъ угловъ, чрезъ ϱ и ϱ_1 — разстоянія точекъ этихъ прямыхъ отъ S и S', найдемъ:

$$x=\varrho\alpha,\ y=\varrho\beta,\ z=\varrho\gamma,\ x'=\varrho_1\alpha,\ y'=\varrho_1\beta,\ z'=\varrho_1\gamma.$$

Слѣдовательно, если $M(x, y, z)$ — точка встрѣчи прямой l_1 съ эллипсоидомъ 1), $N(x', y', z')$—точка встрѣчи прямой l_2 съ эллипсоидомъ 2), то

$$\frac{H}{\varrho^2}=P\alpha^2+Q\beta^2+R\gamma^2$$

$$\frac{H}{\varrho_1^2}=P'\alpha^2+Q'\beta^2+R'\gamma^2=\varphi^2(P\alpha^2+Q\beta^2+R\gamma^2),$$

въ силу формулъ B). Слѣдовательно,

$$\frac{H}{\varrho^2}=\frac{H}{\varrho_1^2\varphi^2},$$

откуда

$$C)\quad \varrho=\varrho_1\varphi.$$

Изъ этой формулы вытекаетъ:

I. Центральный эллипсоидъ инерціи сжимается, если тѣло расширяется, и обратно.

II. При измѣненіи центральный эллипсоидъ остается себѣ подобнымъ.

О главныхъ полярныхъ моментахъ инерціи. Обозначимъ чрезъ Π и Π' полярные квадратичные моменты инерціи тѣла относительно центра инерціи въ положеніяхъ A и B соотвѣтственно. По опредѣленію,

$$\Pi = \Sigma m\varrho^2, \quad \Pi' = \Sigma m\varrho'^2,$$

гдѣ ϱ и ϱ'—разстоянія отъ центровъ инерціи S и S' фигуръ A и B гомологичныхъ точекъ послѣднихъ. Слѣдовательно, въ силу А),

$$\text{D)} \quad \Pi' = \varphi^2 \Pi.$$

§ II. Основанія статики подобно-измѣняемаго тѣла.

Въ сочиненіи „Механика подобно-измѣняемой системы“ [1]) нами было показано, что въ статику подобно-измѣняемаго тѣла необходимо ввести *пару сжатія или растяженія* (Вып. III, стр. 21—23). Такъ мы назвали совокупность двухъ равныхъ и прямопротивоположныхъ силъ P_A и P_B, дѣйствующихъ вдоль одной и той же прямой на точки A и B послѣдней. AB—плечо пары, произведеніе $\pm AB.P$—моментъ пары растяженія или сжатія соотвѣтственно.

Вся статика была нами построена на 2 предложеніяхъ:

A. Двѣ силы, приложенныя къ одной и той же точкѣ, складываются по правилу параллелограмма;

B. Пару растяженія или сжатія можно перенести на любую прямую подобно-измѣняемаго тѣла.

Сдѣлаемъ здѣсь бѣглый обзоръ главныхъ предложеній статики разсматриваемаго тѣла, отсылая за доказательствами къ 3-му выпуску указаннаго труда.

I. Двѣ одноименныя пары эквивалентны, если ихъ моменты равны [2]).

---

[1]) Одесса, 1890—91, въ 3 вып.

[2]) l. cit. стр. 22.

II. Совокупность любаго числа паръ эквивалентна одной, моментъ которой есть алгебрическая сумма моментовъ складываемыхъ паръ [1]).

III. Совокупность силы P_A и пары, моментъ которой равенъ $\pm M$, эквивалентна силѣ P_B, отличающейся отъ P_A только точкой приложенія, причемъ

$$AB = \frac{M}{P}.$$

Если $M > o$, то направленія AB и силы P одинаковы; въ противномъ случаѣ эти направленія прямо противоложны [2]).

IV. Величина и направленіе равнодѣйствующей силы R_C двухъ силъ P_A и P_B, направленія которыхъ пересѣкаются въ точкѣ O, опредѣляются, какъ въ статикѣ твердаго тѣла. Добавляется лишь правило, по которому точка C приложенія силы R лежитъ на окружности, проходящей чрезъ точки A, B и O [3]).

Совокупность двухъ равныхъ, параллельныхъ и прямопротивоположныхъ силъ P_A и P_B назовемъ *парой вращенія*, если прямая AB перпендикулярна къ общему направленію силъ P. AB — плечо, произведеніе $AB.P$ — моментъ пары. *Сторона* вращенія послѣдней опредѣляется какъ въ твердомъ тѣлѣ; точно также геометрически изображается моментъ пары.

V. Законы эквивалентности паръ, введенныхъ Poinsot въ статику твердаго тѣла, а также дѣйствій надъ ними, вполнѣ справедливы для паръ вращенія [4]).

VI. Система силъ, дѣйствующихъ на точки подобно-измѣняемаго тѣла, можетъ быть замѣнена совокупностью силы R_0, пары вращенія, моментъ G_0 которой вообще не параллеленъ силѣ R, и пары растяженія (Π_0). Точка O—произвольная точка тѣла. Если отнесемъ тѣло къ прямоугольнымъ осямъ x, y, z, начало которыхъ въ O, то имѣютъ мѣсто слѣдующія формулы:

---

[1]) l. cit. стр. 25.

[2]) l. cit. стр. 17 и Вып. I, стр. 18.

[3]) Möbius Lehrbuch der Statik. § 234, также l. cit., стр. 21.

[4]) l. cit. стр. 26.

$$
\text{E)} \left\{ \begin{array}{l} A=\Sigma X,\ B=\Sigma Y,\ C=\Sigma Z;\ R_0^{\,2}=A^2+B^2+C^2. \\ L=\Sigma(yZ-zY),\ M=\Sigma(zX-xZ); \\ N_0=\Sigma(xY-yX),\ G^2_{\ 0}=L^2+M^2+N^2, \\ \Pi_0=\Sigma(xX+yY+zZ). \end{array} \right.
$$

Здѣсь X, $У$, Z,—слагающія по осямъ силы P, дѣйствующей на точку (x, y, z), A, B, C и L, M, N — слагающія силы R и момента M_0, Π_0—моментъ пары растяженія (Π_0) [1]).

VII. Силы, дѣйствующія на точки подобно-измѣняемаго тѣла, эквивалентны совокупности силы R_ω и пары вращенія ((G_ω)), моментъ которой параллеленъ силѣ R. Точка ω — вполнѣ опредѣленная точка тѣла и называется *центральной* точкой. Величина, направленіе и положеніе силы R, а также момента G опредѣляется, какъ въ статикѣ твердаго тѣла. Прямая, вдоль которой дѣйствуетъ сила R, называется *центральной осью*. Совокупность силы R_ω и пары вращенія (G_ω) наз. силовымъ винтомъ; ω—центръ, отношеніе $\frac{G}{R}=p$ — параметръ послѣдняго [2]).

VIII. Если на тѣло дѣйствуютъ параллельныя силы P, направленныя въ одну и ту же сторону, то система эквивалентна одной силѣ R_0. Сила эта имѣетъ одно направленіе съ силами P и равна ихъ суммѣ. Обозначая чрезъ x_0, y_0, z_0 прямоугольныя координаты точки O, чрезъ x, z, y—координаты точки приложенія силы P, найдемъ:

$$
G)\ x_0=\frac{\Sigma Px}{\Sigma P},\ y_0=\frac{\Sigma Py}{\Sigma P}=,\quad z_0=\frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.
$$

§ III. Теорія мгновенныхъ силъ.

I. Предположимъ, что тѣло обладаетъ поступательной скоростью v. Мгновенныя силы f, дѣйствующія на точки μ тѣла, параллельны v; кромѣ того,

$$
f=mv,
$$

---

[1]) l. cit. стр. 40 и 55.
[2]) l. cit. стр. 41 и 42.

если m—масса точки μ. Совокупность силъ f эквивалентна (§ II, VIII) одной силѣ R_0, причемъ

$$R=\Sigma mv=v\Sigma m,$$

$$x_0=\frac{\Sigma mvx}{\Sigma mv}=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m},\ y_0=\frac{\Sigma mvy}{\Sigma mv}=\frac{\Sigma my}{\Sigma m},\ z_0=\frac{\Sigma mvz}{\Sigma mv}=\frac{\Sigma mz}{\Sigma m},$$

если x_0, y_0, z_0—координаты точки O. Полученными формулами доказывается

Предложеніе III [1]). Мгновенныя силы, вызывающія поступательную скорость v тѣла, эквивалентны одной силѣ R, приложенной къ центру инерціи. Сила R равна произведенію изъ массы тѣла на скорость v и параллельна скорости v.

Обратно: мгновенная сила R, приложенная къ центру инерціи подобно-измѣняемаго тѣла, вызываетъ въ послѣднемъ поступательную скорость v, параллельную силѣ R и равную отношенію послѣдней къ массѣ тѣла.

II. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда тѣло обладаетъ скоростью расширенія η вокругъ центра инерціи S (черт. 11). Скорость v какой-нибудь точки μ направлена по прямой $S\mu=\varrho$, причемъ

$$v=\varrho\eta.$$

Тоже направленіе имѣетъ мгновенная сила $f=mv$, дѣйствующая на точку μ. Примемъ точку S за начало прямоугольныхъ координатъ x, y, z и разложимъ каждую силу f параллельно осямъ на слагающія X, Y, Z. Легко видѣть, что, если x, y, z—координаты точки μ, то

$$X=f\frac{x}{\varrho},\ Y=f\frac{y}{\varrho},\ \ Z=f\frac{z}{\varrho};$$

но $f=mv=m\eta\varrho$; слѣдовательно,

$$X=\eta mx,\ Y=\eta\ my,\ Z=\eta mz.$$

[1]) *Примѣчаніе.* Это предложеніе доказано Poinsot для твердаго тѣла. Ср. Poinsot l. c. стр. 24. и 25.

Внеся эти значенія въ формулы E) § II, найдемъ, замѣчая, что

$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0,$$

$$A_s = B_s = C_s = R_s = 0, \; L_s = M_s = N_s = 0$$

$$\Pi_s = \eta \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2) = \eta \Sigma m\varrho^2 = \eta \Pi',$$

гдѣ Π'—главный полярный моментъ инерціи тѣла. Мы получили

Предложеніе IV. Мгновенныя силы, вызывающія скорость η лучистаго расширенія вокругъ центра инерціи, эквивалентны парѣ растяженія, моментъ которой равенъ произведенію скорости η на главный полярный моментъ инерціи тѣла.

Обратно: мгновенная пара растяженія вызываетъ лучистое расширеніе со скоростью η вокругъ центра инерціи. Скорость η равна отношенію момента пары къ главному полярному моменту инерціи тѣла.

Примѣчаніе. Мы видѣли въ I части (§ II, форм. B), что

$$\eta = \frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{dt}.$$

Слѣдовательно,

$$\Pi_s = \eta \Sigma m\varrho^2 = \Sigma m\varrho \frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\Sigma m\varrho^2 = \frac{1}{2}\,\frac{d\Pi'}{dt}$$

т. е. *скорость η расширенія вокругъ центра инерціи вызывается мгновенной парой растяженія, моментъ которой равенъ $1/2$ производной по времени полярнаго момента инерціи.*

III. Положимъ, что тѣло обладаетъ скоростью η лучистаго расширенія вокругъ точки O, не совпадающей съ центромъ инерціи S. Это движеніе эквивалентно (ч. I, § II) совокупности расширенія со скоростью η вокругъ центра инерціи и поступательной скорости, равной скорости $OS.\eta$ центра инерціи.

Первая скорость вызывается (Предл. IV) мгновенной парой растяженія (Π_s), причемъ

$$\Pi_s = \eta \Sigma m\varrho^2;$$

вторая — мгновенной силой R_s (Предл. III), приложенной къ центру инерціи и направленной по OS; кромѣ того,

$$R_s = OS.\eta\Sigma m.$$

Совокупность пары (Π_s) и силы R_s мы можемъ (§ II, III) замѣнить одной силой R_{o_1} той же величины и направленія, но приложенной къ точкѣ O_1 прямой OS, причемъ

$$R_s.SO_1 = \Pi_s,$$

или

$$OS.SO_1.\Sigma m = \Sigma m\rho^2,$$

въ силу предыдущихъ значеній R_s и Π_s. Введемъ радіусъ i главной полярной инерціи. По опредѣленію,

$$i^2\Sigma m = \Sigma m\rho^2;$$

слѣдовательно, только что полученная формула приметъ видъ:

$$OS.SO_1 = i^2,$$

чѣмъ доказывается

Предложеніе V. Мгновенныя силы, вызывающія скорость η лучистаго расширенія вокругъ точки O, не совпадающей съ центромъ инерціи S, эквивалентны одной силѣ R, дѣйствующей вдоль прямой OS и приложенной къ точкѣ O_1 послѣдней, причемъ произведеніе разстояній точекъ O и O_1 отъ центра инерціи равно квадрату радіуса главной полярной инерціи. Сила R равна произведенію скорости η на массу тѣла и на разстояніе OS центра расширенія отъ центра инерціи.

IV. Пусть теперь тѣло вращается со скоростью ω вокругъ одной изъ главныхъ осей инерціи (черт. 12). Какая-нибудь точка μ тѣла обладаетъ въ силу этого движенія скоростью $v = \omega d$, гдѣ d—разстояніе точки μ отъ оси вращенія s. Мгновенная сила f, вызывающая эту скорость, равна $m\omega d$, вмѣстѣ со скоростью v перпендикулярна къ плоскости (s, μ) и направлена въ сторону вращенія.

Примемъ s за ось z прямоугольныхъ координатъ, начало

которыхъ совпадаетъ съ центромъ инерціи S. Разложимъ силу f параллельно осямъ на слагающія X, Y, Z. Обозначая чрезъ x, y, z координаты точки μ, найдемъ въ силу сказаннаго

$$X=-f\frac{y}{r},\ Y=f\frac{x}{r},\ Z=0$$

или, вставляя предыдущее значеніе силы f:

$$X=-\omega m y,\ Y=\omega m x,\ Z=0.$$

Внеся эти величины въ формулы E) § II, найдемъ,

$$A_s=B_s=C_s=R_s=0$$

$$L_s=M_s=0;\ N_s=\omega\Sigma m(x^2+y^2),\ \Pi_s=0,$$

такъ какъ въ данномъ случаѣ

$$\Sigma mx=\Sigma my=\Sigma mz=\Sigma mxz=\Sigma myz=0.$$

Мы доказали такимъ образомъ

Предложеніе VI [1]). Мгновенныя силы, вызывающія угловую скорость ω вокругъ одной изъ главныхъ осей инерціи s, эквивалентны парѣ вращенія, моментъ N_s которой параллеленъ s и равенъ произведенію скорости ω на моментъ инерціи тѣла относительно прямой s.

Обратно: мгновенная пара вращенія, моментъ N которой параллеленъ главной оси s инерціи, вызываетъ вокругъ прямой s скорость вращенія ω, равную отношенію момента N пары къ моменту инерціи тѣла относительно прямой s.

Примѣчаніе. Мы теперь въ состояніи опредѣлить тотъ кинематическій винтъ, который вызывается любой данной системой мгновенныхъ силъ f. Для этого приведемъ систему f къ центру S инерціи. Это дастъ намъ силу R_s, пару вращенія $((G_s))$ и пару растяженія (Π_s). Пусть M—масса тѣла, Π'—главный полярный моментъ инерціи, P', Q' и R'—моменты инер-

---

(1) *Примѣчаніе.* Это предложеніе доказано Poinsot для твердаго тѣла. Ср. l. c. стр. 27.

ціи вокругъ главныхъ осей инерціи. Сила R_s вызоветъ поступательную скорость $v=\frac{R_s}{M}$, параллельную R_s. Пара растяженія (Π_s) вызоветъ скорость $\eta=\frac{\Pi_s}{\Pi'}$ лучистаго расширенія вокругъ точки S. Намъ остается опредѣлить дѣйствіе пары $((G_s))$ [1]. Для этого разложимъ ее на три слагающихъ $((L_s))$, $((M_s))$ и $((N_s))$, моменты L_s, M_s и N_s которыхъ параллельны главнымъ осямъ инерціи x, y, z. Пара $((L_s))$ вызоветъ, какъ мы только что видѣли, угловую скорость $p=\frac{L_s}{P'}$ вокругъ оси x, пара $((M_s))$— угловую скорость $q=\frac{M_s}{Q'}$ вокругъ оси y и наконецъ пара $((N_s))$— угловую скорость $r=\frac{N_s}{R'}$ вокругъ оси z. Складывая скорости v, η, p, q и r, какъ это было показано въ части I, мы придемъ къ искомому кинематическому винту.

Разсмотримъ центральный эллипсоидъ инерцій:

$$1)\quad P'x^2+Q'y^2+R'z^2=H.$$

Здѣсь H—постоянная величина. Построимъ въ разсматриваемый моментъ начальную фазу эллипсоида инерціи. Уравненія ея будетъ:

$$2)\quad Px^2+Qy^2+Rz^2=H.$$

Здѣсь H имѣетъ прежнее значеніе. Величины P', Q' и R' связаны съ P, Q, R соотношеніями

$$3)\quad P'=P\varphi^2,\ Q'=Q\varphi^2,\ R'=R\varphi^2.\ (\S\ \text{I, фор. B})$$

Напомнимъ, что главныя оси эллипсоидовъ 1) и 2) совпадаютъ съ главными осями инерціи.

Положимъ, что на тѣло дѣйствуетъ мгновенная пара вращенія $((G_s))$. Разложимъ ее на три пары, моменты которыхъ N_1, N_2 и N_3 параллельны осямъ инерціи. Эти пары

[1]) Ср. Poinsot. l. c. стр. 27 и 28.

вызовутъ (Предл. VI) угловыя скорости p, q и r вокругъ главныхъ осей, причемъ

$$4)\ N_1 = pP',\ N_2 = qQ',\ N_2 = rR'.$$

Если бы пара $((G_s))$ подѣйствовала на тѣло, не испытавшее деформаціи φ, то мы получили бы угловыя скорости p_1, q_1 и r_1, для которыхъ имѣли бы мѣсто соотношенія

$$N_1 = p_1 P,\ N_2 = q_1 Q,\ N_3 = r_1 R.$$

Сравнивая эти формулы съ вышенаписанными, найдемъ:

$$5)\ \frac{p_1}{p} = \frac{q_1}{q} = \frac{r_1}{r} = \varphi^2,$$

въ силу формулъ 3). Обозначая чрезъ ω и ω_1 результирующія скоростей p, q и r; p_1, q_1 и r_1 соотвѣтственно, получимъ:

$$6)\ \omega_1 = \omega\varphi^2.$$

Формулами 5) и 6 доказывается

Предложеніе VII. Угловая скорость ω, вызываемая мгновенной парой вращенія въ подобно-измѣняемомъ тѣлѣ, испытавшемъ деформацію φ, отличается только величиной отъ угловой скорости ω_1, которую вызвала бы та же пара въ тѣлѣ, если бъ оно не испытало деформаціи. Отношеніе $\frac{\omega_1}{\omega}$ этихъ скоростей равно квадрату линейнаго расширенія.

Пусть M (x, y, z) — точка встрѣчи оси вращенія ω съ эллипсоидомъ 2). По предположенію

$$x:y:z = p:q:r.$$

Обозначимъ чрезъ α, β, γ — cs²ы угловъ, образуемыхъ съ осями координатъ нормалью къ эллипсоиду въ M. Какъ извѣстно,

$$x:y:z = \frac{\alpha}{P} : \frac{\beta}{Q} : \frac{\gamma}{R}.$$

Но изъ формулъ 3) и 4) слѣдуетъ:

$$p:q:r=\frac{N_1}{P}:\frac{N_2}{Q}:\frac{N_3}{R},$$

слѣдовательно,

$$\alpha:\beta:\gamma=N_1:N_2:N_3,$$

чѣмъ доказывается

Предложенiе VIII. Моментъ мгновенной пары вращенiя, вызывающiй угловую скорость вращенiя вокругъ радiуса центральнаго эллипсоида, параллеленъ нормали къ эллипсоиду, проведенной въ концѣ радiуса [1]).

Иными словами: Если осью вращенiя ω служитъ радiусъ ϱ центральнаго эллипсоида, то плоскость соотвѣтствующей мгновенной пары вращенiя параллельна плоскости, сопряженной съ ϱ.

Пусть k — длина перпендикуляра, опущеннаго изъ центра эллипсоида 2) на касательную плоскость въ M. Этотъ перпендикуляръ, по предыдущему, параллеленъ моменту G_s. По извѣстной формулѣ,

$$k^2=H\left(\frac{\alpha^2}{P}+\frac{\beta^2}{Q}+\frac{\gamma^2}{R}\right)$$

Но, по доказанному выше,

$$\alpha=\frac{N_1}{G_s},\ \beta=\frac{N_2}{G_s},\ \gamma=\frac{N_3}{G_s},$$

слѣдовательно,

$$k^2=\frac{H}{G_s^2}\left(\frac{N_1^2}{P}+\frac{N_2^2}{Q}+\frac{N_3^2}{R}\right)=\frac{H}{G_s}\left(\frac{N_1}{G_s}\cdot\frac{N_1}{P}+\frac{N_2}{G_s}\cdot\frac{N_2}{Q}+\frac{N_3}{G_s}\frac{N_3}{R}\right)$$

Но формулы 3) и 4 даютъ:

$$N_1=P'p=P\varphi^2p,\ N_2=Q'q=Q\varphi^2q,\ N_3=R'r=R\varphi^2r,$$

---

[1]) *Примѣчанiе.* Это предложенiе доказано Poinsot для твердаго тѣла. Ср. l. c. стр. 57 и 58.

откуда

$$\frac{N_1}{P}=\varphi^2 p,\ \frac{N_2}{Q}=\varphi^2 q,\ \frac{N_3}{R}=\varphi^2 r.$$

Внеся эти значенія въ выраженіе для k^2, найдемъ:

$$k^2=\frac{H}{G_s}\left(\frac{N_1}{G_s}p+\frac{N_2}{G_s}q+\frac{N_3}{G_s}r\right)\varphi^2.$$

Величина, стоящая въ скобкахъ, представляетъ проекцію скорости ω на направленіе момента G_s. Обозначая, слѣдовательно, чрезъ i уголъ (G_s, ω), найдемъ:

$$G)\ \ k^2=\frac{H}{G_s}\varphi^2\omega csi.$$

Эта формула будетъ намъ очень полезна.

Найдемъ теперь проекцію $G_s csi$ момента G_s на ось ω. Очевидно,

$$G_s csi=\frac{1}{\omega}\left(N_1 p+N_2 q+N_3 r\right)=\frac{P'p^2+Q'q^2+R'r^2}{\omega},$$

въ силу предыдущихъ значеній величинъ N_1, N_2 и N_3. Полученную формулу можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$Gcsi=\left[P'\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+Q'\left(\frac{q}{\omega}\right)^2+R'\left(\frac{r}{\omega}\right)^2\right]\omega.$$

Но отношенія $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$ и $\frac{r}{\omega}$ представляютъ cs'ы угловъ, образуемыхъ съ осями инерціи осью вращенія ω. Отсюда мы заключаемъ, въ силу извѣстной теоремы, что выраженіе, стоящее въ скобкахъ, представляетъ моментъ инерціи тѣла относительно оси вращенія. Обозначая чрезъ r—разстоянія точекъ тѣла отъ этой оси, найдемъ слѣдовательно

$$H)\ \ Gcsi=\omega\Sigma mr^2.$$

Въ заключеніе настоящаго § вычислимъ живую силу $2\ T$ тѣла, обладающаго самымъ общимъ движеніемъ.

Пусть тѣло испытываетъ движеніе, представляемое коническимъ винтомъ $O(p,s)$. Скорость v какой нибудь точки μ дается формулой

$$v^2=r_1{}^2\omega^2+\varrho_1{}^2\eta^2 \text{ (ч. I, § II, ф. B)}$$

Здѣсь η и ω—слагающія скорости винта, ϱ_1 и r_1 соотвѣтственно разстоянія точки μ отъ центра O винта и оси S послѣдняго. Если m—масса точки μ, то по опредѣленію живая сила $2T_0$, соотвѣтствующая винту $O(p,s)$, равна

$$2T_0=\Sigma mv^2=\omega^2\Sigma mr_1{}^2+\eta^2\Sigma m\varrho_1{}^2.$$

Проведемъ чрезъ центръ S инерціи прямую s' параллельно s. Если обозначимъ чрезъ ϱ и r—разстоянія точки μ отъ S и s', то, какъ извѣстно,

$$\Sigma mr_1{}^2=M.d^2+\Sigma mr^2,\ \Sigma m\varrho_1{}^2=Ma^2+\Sigma m\varrho^2,$$

гдѣ M—масса тѣла, d и a—разстоянія центра инерціи отъ оси s и центра O винта $O(p,s)$. Слѣдовательно,

$$2\ T_0=M(\omega^2d^2+\eta^2a^2)+\omega^2\Sigma mr^2+\eta^2\Sigma m\varrho^2.$$

Но, если v—скорость центра инерціи, то

$$v^2=\omega^2d^2+\eta^2a^2.$$

Слѣдовательно, первый членъ выраженія $2T_0$ представляютъ живую силу $2T_s$ центра инерціи, если предположить, что въ немъ сосредоточена вся масса M тѣла. Значеніе остальныхъ двухъ членовъ ясно. Первый $\omega^2\Sigma mr^2$ представляетъ живую силу $2T_\omega$ вращенія со скоростью ω вокругъ оси s', второй $\eta^2\Sigma m\varrho^2$—живую силу $2T_\eta$ расширенія со скоростью η вокругъ центра инерціи.

Слѣдовательно,

$$2T_0=2T_s+2T_\omega+2T_\eta.$$

Сумму $2T_\omega+2T_\eta$ назовемъ относительной живой силой тѣла и обозначимъ чрезъ $2T$. Выраженіе

$$2T = 2T_\omega + 2T_\eta = \omega^2 \Sigma m r^2 + \eta^2 \Sigma m \rho^2$$

можно представить въ слѣдующихъ видахъ:

$$K)\quad 2T = G\omega \cos i + \eta^2 \Sigma m \rho^2$$

въ силу формулы H), или

$$K')\quad 2T = P'p^2 + Q'q^2 + R'r^2 + \eta^2 \Sigma m \rho^2$$

или наконецъ

$$K'')\quad 2T = \varphi^2 (Pp^2 + Qq^2 + Rr^2) + \eta^2 \Sigma m \rho^2.$$

Обозначимъ чрезъ $2T_1$ относительную живую силу тѣла въ томъ случаѣ, еслибъ оно не испытало деформаціи φ и находилось подъ дѣйствіемъ тѣхъ же силъ. Въ этомъ случаѣ

$$2T_1 = Pp_1^2 + Qq_1^2 + Rr_1^2,$$

гдѣ

$$p_1 = p\varphi^2,\ q_1 = q\varphi^2,\ r_1 = r\varphi^2 \ \text{(форм. 5)}$$

слѣдовательно,

$$2T_1 = \varphi^4 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Сравнивая это выраженіе съ K'', найдемъ:

$$2T = \frac{2T_1}{\varphi_2} + \eta^2 \Sigma m \rho^2.$$

Введемъ значенія Π и Π' главнаго полярнаго момента инерціи въ началѣ движенія и въ разсматриваемый моментъ.

Мы видѣли (§ I, форм. C), что

$$\Pi' = \Sigma m \rho^2 = \varphi^2 \Pi.$$

Внеся это значеніе въ выраженіе $2T$ и замѣчая, что

$$\eta\varphi = \frac{d\varphi}{dt},$$

находимъ окончательно:

$$\text{L)}\ 2T=\frac{2T_1}{\varphi^2}+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \Pi$$

Это—чрезвычайно важный результатъ. Введя моментъ Π въ формулу K) и снова пользуясь тѣмъ, что

$$\eta\varphi=\frac{d\varphi}{dt},$$

имѣемъ:

$$\text{M)}\ 2T=G\omega csi+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \Pi.$$

Формулы L) и M) намъ будутъ очень полезны.

§ IV. Рѣшеніе задачи Poinsot для подобно-измѣняемаго тѣла.

Воспользуемся результатами предыдущихъ изслѣдованій для рѣшенія слѣдующей задачи:

Задача. На свободное, подобно-измѣняемое тѣло подѣйствовала система мгновенныхъ силъ f и затѣмъ тѣло представлено самому себѣ. Найти движеніе тѣла.

Приведемъ систему силъ f къ центру инерціи S. Пусть P_s, $((G_s))$ и (Π_s)—элементы приведенія; P_s—сила, $((G_s))$—пара вращенія, (Π_s)—пара растяженія (§ II, VI). Обозначимъ чрезъ M—массу тѣла, чрезъ P', Q' и R'—моменты инерціи относительно главныхъ осей инерціи и чрезъ Π'—главный полярный моментъ инерціи.

Мгновенное движеніе тѣла слагается изъ слѣдующихъ скоростей:

1. Поступательной скорости v.

$$v=\frac{P_s}{M};\ (\text{Пр. III})$$

скорость v параллельна силѣ P_s.

2. Скорости η лучистаго расширенія вокругъ центра S, причемъ

$$\eta = \frac{\Pi s}{\Pi'};\ (\text{Предл. IV}).$$

3. Скорости ω вращенія вокругъ радіуса Sa центральнаго эллипсоида. Прямая Sa сопряжена съ плоскостью, проведенной чрезъ S параллельно плоскости пары $((G_s))$ (Пр. VIII). Кромѣ того, если p, q и r, N_1, N_2 и N_3 — слагающія скорости ω и момента пары параллельно главнымъ осямъ инерціи, то

$$p = \frac{N_1}{P'},\ q = \frac{N_2}{Q'},\ r = \frac{N_3}{R'}.\ (\text{Предл. VI}).$$

Складывая скорости v, η и ω по правиламъ, указаннымъ въ I части (§ III), мы найдемъ коническій винтъ, характеризующій мгновенное движеніе тѣла.

Перейдемъ къ непрерывному движенію послѣдняго. Для рѣшенія этого вопроса воспользуемся извѣстными принципами динамики свободныхъ системъ, на которыя не дѣйствуютъ непрерывныя силы. Принципы эти слѣдующіе:

I. Принципъ сохраненія силы P_s.

II. Принципъ сохраненія пары $((G_s))$.

III. Принципъ сохраненія живой силы.

Изъ перваго принципа вытекаетъ, что скорость v во все время движенія не измѣняетъ величины и направленія. Замѣчая, что центръ S инерціи въ движеніяхъ η и ω не принимаетъ участія, заключаемъ:

Предложеніе IX. Центръ инерціи движется равномѣрно по прямой линіи, параллельной направленію силы Ps.

Слѣдствіе. Живая сила центра инерціи, вычисленная въ томъ предположеніи, что въ этой точкѣ сосредоточена вся масса тѣла, остается постоянной.

Отсюда и изъ третьяго принципа заключаемъ:

Предложеніе X. Живая сила относительнаго движенія тѣла вокругъ центра инерціи остается постоянной [1]).

---

[1]) *Примѣчаніе.* Предложенія IX и X справедливы для всякой свободной системы точекъ.

Для упрощенія дальнѣйшихъ соображеній отвлечемся отъ движенія центра инерціи S и займемся изученіемъ лишь относительнаго движенія тѣла вокругъ точки S. Мы будемъ, слѣдовательно, считать эту точку неподвижной.

Пусть Σ_1 — какое нибудь положенія тѣла, S — центръ инерціи, SG—моментъ пары $((G_s))$, $S\alpha$ — ось вращенія со скоростью ω, вызваннаго парой $((G_s))$ (черт. 13).

За безконечно-малый промежутокъ времени τ тѣло перейдетъ въ смежное положеніе Σ_2, причемъ оно повернется вокругъ оси $S\alpha$ на уголъ $\omega\tau$ и испытаетъ лучистую деформацію съ нѣкоторой скоростью η вокругъ точки S. Въ силу перваго движенія главныя оси инерціи Sx, Sy и Sz перейдутъ въ положенія Sx', Sy' и Sz', а прямая Sg, совпадавшая вначалѣ съ SG, перейдетъ въ положеніе Sg', причемъ

$$<gS\alpha = <g'S\alpha = i.$$

Въ силу втораго движенія отрѣзокъ ϱ тѣла измѣнится на величину

$$d\varrho = \eta\varrho\tau;$$

слѣдовательно, элементарное линейное расширеніе ψ тѣла равно:

$$\psi = \frac{\varrho + d\varrho}{\varrho} = 1 + \eta\tau.$$

Въ обоихъ движеніяхъ не принимаютъ участія ни точка S, ни прямая $S\alpha$; второе движеніе не отразится на прямыхъ Sx', Sy', Sz' и Sg'. (Ч. I, стр. 9). Слѣдовательно, прямая $S\alpha$ одинаково расположена относительно прямыхъ Sx и Sx', Sy и Sy', Sz и Sz' соотвѣтственно; что же касается прямой Sg', то она также расположена относительно прямыхъ Sx', Sy' и Sz', какъ прямая Sg относительно Sx, Sy и Sz.

Въ силу втораго принципа на тѣло въ положеніи Σ_2 дѣйствуетъ та же пара $((G_s))$. Такъ какъ тѣло измѣнило свое положеніе относительно момента SG пары, то дѣйствіе послѣдней теперь будетъ иное.

Для опредѣленія этого дѣйствія разложимъ моментъ SG на слагающіе SG_1 и G_1G, изъ которыхъ первый равенъ SG и направленъ по Sg'.

Въ силу вышесказаннаго моментъ SG_1 также расположенъ относительно осей Sx', Sy' и Sz', какъ моментъ SG относительно осей Sx, Sy и Sz. Слѣдовательно, пара $((SG_1))$ вызоветъ угловую скорость вокругъ оси $S\alpha$, какъ двойной прямой фигуръ Σ_1 и Σ_2.

Перейдемъ къ парѣ $((G_1\ G))$. Замѣтимъ, что въ предѣлѣ плоскость G_1GS перпендикулярна къ плоскости $GS\alpha$, такъ какъ прямыя Sg и Sg' суть смежныя производящія прямого, круглаго конуса, ось котораго совпадаетъ съ $S\alpha$, а вершина съ точкой S. Далѣе, такъ какъ треугольникъ GSG_1 равнобедренный, то въ предѣлѣ $<SGG_1$—прямой. Отсюда и изъ вышесказаннаго вытекаетъ, что въ предѣлѣ направленіе G_1G перпендикулярно къ плоскости $GS\alpha$. Слѣдовательно, плоскость пары $((G_1G))$ параллельна плоскости $GS\alpha$. Если $S\beta$—радіусъ центральнаго эллипсоида, сопряженный съ этой плоскостью, то пара $((G_1G))$ вызоветъ вращеніе вокругъ $S\beta$ (Предл. VIII). Легко видѣть, что прямая $S\beta$ перпендикулярна къ SG [1]). Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ сопряженная съ $S\beta$ плоскость $GS\alpha$ проходитъ чрезъ $S\alpha$, то плоскость q, сопряженная съ $S\alpha$, должна проходить чрезъ $S\beta$. Но плоскость q перпендикулярна къ SG (Пред. VIII).

Теперь легко уже доказать слѣдующее предложеніе:

Предложеніе XI [2]). Проекція скорости вращенія на постоянное направленіе момента пары $((Gs))$ измѣняется обратно пропорціонально квадрату линейнаго расширенія тѣла.

Доказательство. Сохранимъ всѣ предыдущія обозначенія. Мы знаемъ, что относительное движеніе тѣла вокругъ центра инерціи состоитъ изъ вращенія и лучистаго расширенія. Слѣдовательно, тѣло, придя въ положеніе Σ_1 (чер 13), испытало линейное расширеніе φ. Допустимъ, что этого расширенія не было. Въ такомъ случаѣ въ положеніи Σ_1 пара $((Gs))$ вызоветъ вращеніе вокругъ той же оси $S\alpha$, но со скоростью ω_1

$$\omega_1 = \omega\varphi^2 \text{ (Предл. VII).}$$

---

[1]) Ср. Poinsot. l. c. стр. 60.

[2]) *Примѣчаніе.* Въ твердомъ тѣлѣ эта проекція остается постоянной Poinsot l. c.

Въ положеніи Σ_2 на тѣло дѣйствуетъ та же пара $((G_s))$, которую мы, какъ и раньше, разложимъ на $((SG))$ и $((G_1 G))$. Первая вызываетъ, какъ мы видѣли, вращеніе вокругъ оси $S\alpha$, вторая—вокругъ оси $S\beta$, перпендикулярной къ SG. Если снова допустимъ, что не было линейнаго расширенія, то теперь тѣло обладало бы прежней скоростью вращенія ω_1 вокругъ оси $S\alpha$ и скоростью $\tilde{\omega}_1$ вокругъ $S\beta$. Геометрическая сумма ω'_1 скоростей ω_1 и $\tilde{\omega}_1$ представляла бы угловую скорость тѣла въ концѣ промежутка времени τ. Такъ какъ ось слагающей $\tilde{\omega}_1$ перпендикулярна къ SG, то проекція на SG скоростей ω_1 и ω_1' одинаковы.

И такъ во все время движенія имѣетъ мѣсто равенство:

$$\omega_1 csi = const,$$

или внеся значеніе ω_1,

$$\omega csi\varphi^2 = const. \ Q. \ E. \ D.$$

Другое доказательство. Въ положеніи Σ_2 (черт. 13) на тѣло дѣйствуютъ пары $((SG_1))$ и $((G_1 G))$. Первая вызываетъ скорость $\bar{\omega}$ вокругъ оси $S\alpha$, причемъ,

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\psi^2}, \text{ (Предл. III)}$$

такъ какъ тѣло испытало элементарное расширеніе ψ за безконечно малый промежутокъ времени τ. Пара $((G_1 G))$ вызываетъ скорость $\tilde{\omega}$ вокругъ оси $S\beta$, перпендикулярной къ SG. Геометрическая сумма скоростей $\bar{\omega}$ и $\tilde{\omega}$ представитъ скорость вращенія ω' тѣла въ концѣ промежутка τ. Какъ и выше, найдемъ, что проекція на прямую SG скорости ω' равна проекціи скорости $\bar{\omega}$. Пусть отрѣзки $S\omega$, $S\bar{\omega}$ оси $S\alpha$ представляютъ скорости ω и $\bar{\omega}$, k и $\bar{k}$—проекціи на SG точекъ ω и $\bar{\omega}$. Треугольники $SK\omega$ и $S\bar{k}\bar{\omega}$ даютъ:

$$\frac{k\bar{k}}{Sk} = \frac{\omega\bar{\omega}}{S\omega} = \frac{\bar{\omega} - \omega}{\bar{\omega}}$$

Но изъ только что сказаннаго слѣдуетъ, что $S\bar{k}$ есть

проекція на SG скорости ω'; значитъ, $k\bar{k}$ есть приростъ за промежутокъ τ проекціи Sk скорости ω. Полагая снова,

$$<GSa=i,$$

найдемъ:

$$Sk=\omega csi,\ k\bar{k}=\Delta\,.\,\omega csi;$$

слѣдовательно,

$$\frac{\Delta.\omega csi}{\omega csi}=\frac{\bar{\omega}-\omega}{\omega}=\frac{\bar{\omega}}{\omega}-1.$$

Но $\bar{\omega}=\frac{\omega}{\psi^2}$, откуда

$$\frac{\Delta.\omega csi}{\omega csi}=\frac{1}{\psi^2}-1=-\frac{(2\eta\tau+\tau^2)}{\psi^2},$$

въ силу значенія: $\psi=1+\eta\tau$.

Раздѣляя обѣ части послѣдняго уравненія на τ и переходя къ предѣлу, получимъ:

$$\frac{1}{\omega csi}\frac{d.\omega csi}{dt}+2\eta=o.$$

Но

$$\eta=\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\ \text{(Ч. I, стр. 10, форм. D)},$$

слѣдовательно,

$$\frac{d.\omega csi}{\omega csi}+\frac{2d\varphi}{\varphi}=o.$$

Интегрируя это уравненіе, находимъ снова:

$$\omega csi\varphi^2=const.\ Q.\ E.\ D.$$

Пусть S — центръ инерціи, GS—моментъ пары $((G_s))$, Sa—ось вращенія со скоростью ω, вызываемаго въ данный моментъ t парой $((G_s))$ (черт. 10).

Построимъ начальную фазу центральнаго эллипсоида, и пусть N—точка встрѣчи прямой $S\alpha$ съ поверхностью эллипсоида. Плоскость (n), касательная къ послѣднему въ N, перпендикулярна къ GS (Пр. II). Кромѣ того, если n — точка встрѣчи прямой GS съ плоскостью (n), то

$$Sn^2 = \frac{H}{G_s}\omega csi\varphi^2 \text{ (§ II, стр. 5, форм. E).}$$

Въ этой формулѣ H—постоянная величина, G_s—моментъ пары $((G_s))$. Въ силу принципа сохраненія послѣдней и только что доказаннаго предложенія заключаемъ:

Предложеніе XII. Во все время движенія остаются неизмѣнными длина и направленіе перпендикуляра, опущеннаго изъ центра инерціи на плоскость, касательную къ начальной фазѣ центральнаго эллипсоида въ точкѣ встрѣчи послѣдняго съ осью вращенія.

Для того, чтобы яснѣе представить себѣ относительное движеніе тѣла вокругъ точки S, примемъ, что центральный эллипсоидъ въ его начальной фазѣ участвуетъ въ вращеніяхъ ω тѣла вокругъ осей $S\alpha$. На основаніи вышесказаннаго движеніе эллипсоида будетъ происходить слѣдующимъ образомъ. Въ каждый моментъ онъ будетъ касаться *неподвижной* плоскости (n) въ точкѣ N и вращаться на уголъ ωdt вокругъ оси SN со скоростью ω, удовлетворяющей условію:

$$\omega csi\varphi^2 = const.,$$

до тѣхъ поръ, пока съ (n) не совпадетъ плоскость n', касательная къ эллипсоиду въ смежной съ N точкѣ N'. Прямая SN' будетъ новой осью вращенія и т. д. Мы можемъ, слѣдовательно, сказать:

Относительное движеніе тѣла вокругъ центра инерціи состоитъ изъ расширенія φ и движенія, при которомъ тѣло не измѣняетъ своихъ размѣровъ. Второе движеніе тожественно съ тѣмъ, при которомъ центральный эллипсоидъ въ его первоначальной фазѣ катится безъ скольженія по неподвижной плоскости.

Примѣчаніе. Здѣсь можетъ возникнуть вопросъ: въ какомъ случаѣ *твердое* тѣло будетъ двигаться такъ, какъ дви-

жется намъ центральный эллипсоидъ. Мы знаемъ [1]), что, если на твердое тѣло A не дѣйствуютъ непрерывныя силы, то центральный эллипсоидъ (a) тѣла катится безъ скольженія по неподвижной плоскости, причемъ, сохраняя тѣ же обозначенія,

$$\omega csi = const.$$

Отсюда прямо вытекаетъ, что *необходимы* непрерывныя силы для того, чтобы при движеніи эллипсоида (a) имѣло мѣсто равенство:

$$\omega csi\varphi^2 = const.,$$

если φ зависитъ отъ времени. Легко видѣть, что это равенство удовлетворяется, если непрерывныя силы таковы, что моментъ пары $((G_s))$ сохраняетъ свое направленіе, но не величину.

Намъ остается найти величину φ въ зависимости отъ времени. Мы видѣли (Пр. II), что живая сила $2T$ относительнаго движенія вокругъ центра инерціи остается постоянной. Для величины $2T$ было найдено слѣдующее выраженіе:

$$2T = G_s \omega csi + \frac{d\varphi^2}{dt^2}\, \Pi. \text{ (§ II, форм. M)}$$

Здѣсь G_s—моментъ пары $((G_s))$, Π—начальное значеніе главнаго полярнаго момента инерціи. Обозначая чрезъ $2A$ постоянное произведніе $\omega csi\varphi^2$, найдемъ:

$$\omega csi = \frac{2A}{\varphi^2};$$

слѣдовательно,

$$2T = \frac{2AG_s}{\varphi^2} + \frac{d\varphi^2}{dt^2}\, \Pi.$$

---

[1]) Poinsot. l. c. стр. 60 и 62

Изъ этого уравненія получаемъ:

$$\frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi^2-\frac{AG_s}{T}}}=dt\sqrt{\frac{2T}{\Pi}}.$$

Интегрированіе этого уравненія даетъ:

$$\sqrt{\varphi^2-\frac{AG_s}{T}}=t\sqrt{\frac{2T}{\Pi}}+B,$$

гдѣ B—новое постоянное, введенное интеграціей. Полученное уравненіе можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$1)\ \varphi^2=\frac{AG_s}{T}+\left[t\sqrt{\frac{2T}{\Pi}}+B\right]^2.$$

Мы доказали такимъ образомъ:

Предложеніе XIII. Квадратъ линейнаго расширенія тѣла есть квадратичная функція времени.

Начнемъ счетъ времени t съ того момента, когда $\varphi=1$. Полагая во 1):

$$t=o,\ \varphi=1,$$

найдемъ:

$$B^2=1-\frac{AG_s}{T}.$$

Въ силу этого значенія B выраженіе 1) величины φ^2 приметъ слѣдующій видъ послѣ простыхъ преобразованій:

$$2)\varphi^2=\frac{2Tt^2+2t\sqrt{2\Pi(T-AG_s)}+\Pi}{\Pi}$$

Введемъ главный полярный моментъ:

$$\Pi'=\varphi^2\Pi\ (\S\ \text{I, форм. } C)$$

Въ силу 2) находимъ:

$$\Pi' = 2Tt^2 + 2t\sqrt{2\ \Pi(T - AG_s)} + \Pi.$$

Изъ этой формулы вытекаетъ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\Pi'\right) = 2Tt + \sqrt{2\Pi(T - AG_s)}.$$

Но мы видѣли (§ II, пред. II), что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\Pi'\right) = \Pi_s,$$

если Π_s—мгновенная пара растяженія; слѣдовательно,

$$3)\ \Pi_s = 2Tt + \sqrt{2\Pi(T - AG_s)},$$

что даетъ:

Предложеніе XIV. Если въ каждый моментъ движенія свободнаго, подобно-измѣняемаго тѣла, на которое не дѣйствуютъ непрерывныя силы, будемъ приводить къ центру инерціи S мгновенныя силы, — то получимъ силу P_s, пару вращенія $((G_s))$ и пару растяженія (Π_s). Моментъ послѣдней измѣняется прямо пропорціонально времени.

Если чрезъ $\Pi_s{}^0$ обозначимъ начальное значеніе момента Π_s, то, какъ показываетъ формула 3),

$$\Pi_s{}^0 = \sqrt{2\Pi(T - AG_s)};$$

слѣдовательно, формулы 2) и 3) примутъ видъ:

$$4)\ \varphi^2 = \frac{2Tt^2 + 2t\Pi_s{}^0 + \Pi}{\Pi},\ \ \Pi_s = 2Tt + \Pi^0{}_s.$$

Пусть Σ_1 и Σ_2—смежныя положенія тѣла въ относительномъ движеніи вокругъ центра инерціи S; SG—моментъ

пары $((G_s))$, Sa — ось вращенія ω, вокругъ вызваннаго парой $((G_s))$ (черт. 14). Изъ Σ_1 въ Σ_2 тѣло переходитъ, вращаясь вокругъ Sa на уголъ $\omega\tau$ и растягиваясь вокругъ S на величину $\psi = 1 + \eta\tau$. Здѣсь τ — безконечно-малый промежутокъ времени, отдѣляющій положенія Σ_1 и Σ_2 (см. стр. 48) Въ силу перваго движенія оси инерціи Sx, Sy и Sz перейдутъ въ положенія Sx', Sy' и Sz', а прямая Sg, совпадающая съ SG, перейдетъ въ положеніе Sg', причемъ

$$\angle gSa = \angle g'Sa' = i.$$

Въ положеніи Σ_2 на тѣло дѣйствуетъ та же пара $((G_s))$. Разложимъ ее на двѣ пары $((SG_1))$ и $((G_1G))$, причемъ моментъ SG первой равенъ SG и направленъ по Sg'. Моментъ $((SG_1))$, какъ мы видѣли (см. тамъ же), также расположенъ относительно фигуры Σ_2, какъ моментъ SG относительно Σ_1. Слѣдовательно, моментъ G_1G представляетъ измѣненіе момента SG относительно тѣла, происшедшее за время τ. Направленіе G_1G намъ извѣстно; оно перпендикулярно къ плоскости GSa. Здѣсь мы займемся вычисленіемъ величины G_1G. Полагая:

$$\angle gSg' = da,$$

найдемъ изъ равнобедреннаго треугольника GSG_1:

$$G_1G = SGda.$$

Для опредѣленія da проведемъ перпендикулярно къ Sa плоскость, которая пересѣкаетъ прямыя Sa, Sg и Sg' въ точкахъ a, g и g' соотвѣтственно. Замѣчая, что

$$\angle gag' = \omega\tau, \ ga = Sgsni,$$

получимъ изъ равнобедренныхъ треугольниковъ Sgg' и agg':

$$gg' = Sg \, . \, da = ga \, . \, \omega\tau = Sg \, . \, sni\omega\tau,$$

откуда

$$da = \omega sni\tau;$$

слѣдовательно,

$$G_1G = SGd\alpha = SG\omega sni\tau.$$

Назовемъ пред. $\frac{G_1G}{\tau}$ *геометрической производной* момента $SG = G_s$ пары $((G_s))$. Полученной формулой, а также вышесказаннымъ о направленіи G_1G, доказывается

Предложеніе XV [1]). Геометрическая производная момента G_s мгновенной пары $((G_s))$ измѣряется произведеніемъ момента G_s и проекціи на плоскость пары вызванной угловой скорости ω. Эта производная перпендикулярна къ моменту G_s и къ оси скорости ω.

Это предложеніе намъ сейчасъ пригодится.

Мы видѣли (§ II, стр. 9), что, если N_1, N_2 и N_3—слагающіе момента пары $((G_s))$ параллельно осямъ инерціи, p, q и r — слагающія параллельно тѣмъ же осямъ угловой скорости ω, то

$$N_1 = P'p,\ N_2 = Q'q,\ N_3 = R'r,$$

гдѣ P', Q', R'—главные моменты инерціи.

Изъ этихъ выраженій величинъ N_1, N_2 и N_3 слѣдуетъ, что слагающія параллельно тѣмъ же осямъ геометрической производной момента G_s будутъ:

$$\frac{d\,.\,P'p}{dt},\ \frac{d\,.\,Q'q}{dt},\ \frac{d\,.\,R'r}{dt}.$$

Помощью этихъ величинъ выразимъ аналитически свойства геометрической производной.

1) Что она образуетъ прямые углы съ моментомъ G_s и осью вращенія ω, выразится слѣдующими уравненіями:

$$5)\begin{cases} P'p\,\frac{d\,.\,P'p}{dt} + Q'q\,\frac{d\,.\,Q'q}{dt} + Rr\,\frac{d\,.\,R'r}{dt} = 0 \\ p\,\frac{d\,.\,P'p}{dt} + q\,\frac{d\,.\,Q'q}{dt} + r\,\frac{d\,.\,R'r}{dt} = 0 \end{cases}$$

[1]) Ср. Poinsot. l. c. стр. 31 и 32. Доказательство Poinsot основано на введеніи центробѣжныхъ силъ, чего намъ удалось избѣжать.

2) Величина производной дается (предл. XV) формулой

$$6)\sqrt{\left(\frac{d\,.\,P'p}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\,.\,Q'q}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\,.\,R'r}{dt}\right)^2}=G_s\omega sni.$$

Изъ уравненій 5) слѣдуетъ:

$$7)\ \frac{\frac{d\,.\,P'p}{dt}}{(Q'-R')qr}=\frac{\frac{d\,.\,Q'q}{dt}}{(R'-P')rp}=\frac{\frac{d\,.\,R'r}{dt}}{(P'-Q')pq}.$$

Обратимся къ тожеству:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(l^2+m^2+n^2)=(\beta n-\gamma m)^2+$$
$$+(\gamma l-\alpha n)^2+(\alpha m-\beta l)^2+(\alpha l+\beta m+\gamma n)^2.$$

Положимъ:

$$\alpha=P'p,\ \beta=Q'q,\ \gamma=R'r,\ l=p,\ m=q,\ n=r.$$

Тогда тожество приметъ видъ:

$$(P'^2p^2+Q'^2q^2+R'^2r^2)(p^2+q^2+r^2)-(P'p^2+Q'q^2+R'r^2)^2=$$
$$=(Q'-R')^2q^2r^2+(R'-P')^2r^2p^2+(P'-Q')^2p^2q^2.$$

Но

$$\omega^2=p^2+q^2+r^2,\ G_s^2=N_1^2+N_2^2+N_3^2=P'^2p^2+Q'^2q^2+R'^2r^2$$
$$G_s\omega csi=N_1p+N_2q+N_3r=P'p^2+Q'q^2+R'r^2;$$

слѣдовательно

$$(P'^2p^2+Q'^2q^2+R'^2r^2)(p^2+q^2+r^2)-(P'p^2+Q'q^2+R'r^2)^2=$$
$$=G_s^2\omega^2-G_s^2\omega^2cs^2i=G_s^2\omega^2sn^2i,$$

въ силу чего вышенаписанное тожество перейдетъ въ

$$(Q'-R')^2q^2r^2+(R'-P')^2r^2p^2+(P'-Q')^2p^1q^2=G_s^2\omega^2sn^2i.$$

Вслѣдствіе этого уравненія 7) можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{\frac{d\,.\,P'p}{dt}}{(Q'-R')qr}=\frac{\frac{d\,.\,Q'q}{dt}}{(R'-P')rp}=\frac{\frac{d\,.\,R'r}{dt}}{(P'-Q')pq}=1,$$

откуда

$$8)\quad \frac{d\,.\,P'p}{dt}=(Q'-R')qr,\ \frac{d\,.\,Q'q}{dt}=(R'-P')rp,\ \frac{d\,.\,R'r}{dt}=(P'-Q')pq.$$

Это—уравненія движенія подобно-измѣняемаго тѣла. Аналогія уравненій Эйлера и этихъ слишкомъ очевидна.

Другой выводъ и полное интегрированіе уравненій 8) читатель найдетъ въ слѣдующей части нашего труда.

Вернемся къ уравненіямъ 5). Первое можно интегрировать, что дастъ

$$P'^2p^2+Q'^2q^2+R'^2r^2=G_s^{\,2}=const.$$

Второе можно представить въ такомъ видѣ:

$$(9\quad P'p\,\frac{dp}{dt}+Q'q\,\frac{dq}{dt}+R'r\,\frac{dr}{dt}+p^2\,\frac{dP'}{dt}+q^2\,\frac{dQ'}{dt}+r^2\,\frac{dR'}{dt}=0.$$

Но, если P, Q, R—начальныя значенія величинъ P', Q', R', то

$$P'=P\varphi^2;\ Q'=Q\varphi^2;\ R'=R\varphi^2,$$

откуда

$$\frac{dP'}{dt}=2P\varphi\,\frac{d\varphi}{dt},\ldots$$

Внеся эти значенія въ 9), получимъ:

$$Pp\,\frac{dp}{dt}+Qq\,\frac{dq}{dt}+Rr\,\frac{dr}{dt}+2\,\frac{1}{\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}\,(Pp^2+Qq^2+Rr^2)=0,$$

или

$$\frac{Pp\,\frac{dp}{dt}+Qq\,\frac{dq}{dt}+Rr\frac{dr}{dt}}{Pp^2+Qq^2+Rr^2}+2\,\frac{1}{\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}=o.$$

Это уравненіе можно интегрировать. Интеграція даетъ:

$$(Pp^2+Qq^2+Rr^2)\varphi^4=const$$

или

$$(P'p^2+Q'q^2+R'r^2)\varphi^2=const.$$

Множитель при φ^2 равенъ $G_s\omega csi$. Такъ какъ величина G_s не зависитъ отъ времени, то

$$\omega csi\varphi^2=const.$$

Мы получили такимъ образомъ снова предложеніе III. На этомъ мы закончимъ изслѣдованія настоящаго параграфа, считая вполнѣ рѣшенной поставленную нами задачу.



Часть III.

ДИНАМИКА (АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРІЯ).

§ I. Основныя уравненія

Аналитическая теорія движенія подобно-измѣняемаго тѣла будетъ нами развита на основаніи принципа Даламбера.

Если мы отнесемъ тѣло къ неподвижнымъ, прямоугольнымъ осямъ координатъ (x', y', z'), то принципъ, о которомъ идетъ рѣчь, выражается слѣдующей формулой:

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x' + \frac{d^2y'}{dt^2}\delta y' + \frac{d^2z'}{dt^2}\delta z'\right) = \Sigma(X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z').$$

Здѣсь m—масса точки (x', y', z'), X', Y', Z'—слагающія параллельно осямъ координатъ силы P, дѣйствующей на эту точку, $\delta x'$, $\delta y'$ и $\delta z'$—слагающія возможнаго перемѣщенія δs послѣдней.

Во всемъ послѣдующемъ принимается, что тѣло совершенно свободно; оно подчинено лишь одному условію — оставаться себѣ подобнымъ во все время движенія.

I. Пусть S (x_0, y_0, z_0)—центръ инерціи тѣла, $M = \Sigma m$—масса послѣдняго. Точка S опредѣляется уравненіями:

$$1)\quad Mx_0 = \Sigma mx', \ My_0 = \Sigma my', \ Mz_0 = \Sigma mz'.$$

Отнесемъ теперь тѣло къ осямъ x'', y'' и z'', парал-

лельнымъ прежнимъ съ началомъ въ точкѣ S. Между координатами x', y', z' и x'', y'', z'' существуютъ зависимости:

$$2)\quad x' = x'' + x_0,\ y' = y'' + y_0,\ z' = z'' + z_0.$$

Изъ этихъ формулъ вытекаетъ:

$$\delta x' = \delta x'' + \delta x_0,\ \delta y' = \delta y'' + \delta y_0,\ \delta z' = \delta z'' + \delta z_0.$$

Мы разбили такимъ образомъ возможное перемѣщеніе тѣла на поступательное перемѣщеніе, равное перемѣщенію центра инерціи, и на перемѣщеніе вокругъ послѣдняго.

Внеся эти значенія въ выраженіе принципа Даламбера, найдемъ:

$$\delta x_0 \Sigma m \frac{d^2x'}{dt^2} + \delta y_0 \Sigma m \frac{d^2y'}{dt^2} + \delta z_0 \Sigma m \frac{d^2z'}{dt^2} + \Sigma m\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\delta x'' + \frac{d^2y'}{dt^2}\delta y'' + \right.$$
$$\left. + \frac{d^2z'}{dt^2}\delta z''\right) = \delta x_0 \Sigma X' + \delta y_0 \Sigma Y' + \delta z_0 \Sigma Z' +$$
$$+ \Sigma(X'\delta x'' + Y'\delta y'' + Z'\delta z'').$$

Такъ какъ тѣло совершенно свободно, то величины δx_0, δy_0 и δz_0 независятъ другъ отъ друга и отъ величинъ $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$. Слѣдовательно, полученное уравненіе распадается на слѣдующія:

$$3)\begin{cases} \Sigma m \dfrac{d^2x'}{dt^2} = \Sigma X',\ \Sigma m \dfrac{d^2y'}{dt^2} = \Sigma Y',\ \Sigma m \dfrac{d^2z'}{dt^2} = \Sigma Z'; \\ \Sigma m\left(\dfrac{d^2x'}{dt^2}\delta x'' + \dfrac{d^2y'}{dt^2}\delta y'' + \dfrac{d^2z'}{dt^2}\delta z''\right) = \Sigma(X'\delta x'' + Y'\delta y'' + Z'\delta z''). \end{cases}$$

Первыя три уравненія въ силу 1) примутъ слѣдующій видъ:

$$A)\quad M\frac{d^2x_0}{dt^2} = \Sigma X',\ M\frac{d^2y_0}{dt^2} = \Sigma Y',\ M\frac{d^2y_0}{dt^2}\Sigma Z'$$

Это—уравненія движенія центра инерціи.

II. Изъ формулъ 2) слѣдуетъ:

$$\Sigma m x' = \Sigma m x'' + M x_0, \quad \Sigma m y' = \Sigma m y'' + M y_0, \quad \Sigma m z' = M m z'' + M z_0;$$

слѣдовательно, въ силу 1):

$$\Sigma m x'' = \Sigma m y'' = \Sigma m z'' = o,$$

откуда

$$4) \quad \Sigma m \delta x'' = \Sigma m \delta y'' = \Sigma m \delta z'' = o.$$

Внесемъ теперь въ четвертое изъ уравненій 3) величины 2) x', y', z'. Эта подстановка даетъ:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} \Sigma m \delta x'' + \frac{d^2 y_0}{dt^2} \Sigma m \delta y'' + \frac{d^2 z_0}{dt^2} \Sigma m \delta z'' + \Sigma m \Big(\frac{d^2 x''}{dt^2} \delta x'' + \frac{d^2 y''}{dt^2} \delta y'' +$$

$$+ \frac{d^2 z''}{dt^2} \delta z'' \Big) = \Sigma (X' \delta x'' + Y' \delta y'' + Z' \delta z),$$

или въ силу 4)

$$\text{B)} \quad \Sigma m \Big(\frac{d^2 x''}{dt^2} \delta x'' + \frac{d^2 y''}{dt^2} \delta y'' + \frac{d^2 z''}{dt^2} \delta z'' \Big) = \Sigma (X' \delta x'' + Y' \delta y'' + Z' \delta z'').$$

Это — уравненіе принципа Даламбера въ относительномъ движеніи тѣла вокругъ центра инерціи.

III. Разсмотримъ дѣйствительно происходящее перемѣщеніе тѣла, характеризуемое величинами dx'', dy'' и dz''. Это перемѣщеніе, очевидно, принадлежитъ къ числу возможныхъ. Мы въ правѣ, слѣдовательно, положить въ формулѣ B):

$$\delta x'' = dx'', \; \delta y'' = dy'', \; \delta z'' = dz'',$$

въ силу чего формула эта приметъ видъ:

$$\Sigma m \Big(\frac{d^2 x''}{dt^2} dx'' + \frac{d^2 y''}{dt^2} dy'' + \frac{d^2 z''}{dt^2} dz'' \Big) = \Sigma (X' dx'' + Y' dy'' + Z' dz'')$$

или

$$d\frac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{dx''}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy''}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz''}{dt}\right)^2\right]=\Sigma(X'dx''+Y'dy''+Z'dz'').$$

Введемъ живую силу $2T$ тѣла, соотвѣтствующую относительному движенію вокругъ центра инерціи. По опредѣленію;

$$2T=\Sigma m\left[\left(\frac{dx''}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy''}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz''}{dt}\right)^2\right].$$

Введя это значеніе въ полученное уравненіе и интегрируя по времени, получимъ:

$$\text{C)}\quad T=\int_{t_0}^{t}\Sigma(X'dx''+Y'dy+Z'dz'')+T_0.$$

Здѣсь T_0 — начальное значеніе величины T.

Уравненіемъ С) выражается такъ называемый принципъ относительной живой силы.

IV. Намъ извѣстно, что однимъ изъ возможныхъ перемѣщеній подобно-измѣняемаго тѣла является лучистое расширеніе. Примемъ центръ инерціи S за центръ расширенія. Пусть ϱ — разстояніе точки S отъ точки (x'', y'', z''), δs — возможное перемѣщеніе послѣдней. Расширеніе, о которомъ идетъ рѣчь, характеризируется тѣмъ, что величина δs геометрически равна $\delta\varrho$, а отношеніе $\frac{\delta\varrho}{\varrho}=k$ одинаково для всѣхъ точекъ тѣла. Аналитически это выражается равенствами:

$$\frac{\delta x''}{x''}=\frac{\delta y''}{y''}=\frac{\delta z''}{z''}=\frac{\delta\varrho}{\varrho}=k,$$

откуда

$$5)\quad \delta x''=kx'',\ \delta y''=ky'',\ \delta z''=kz''.$$

Внеся эти значенія въ В), получимъ по сокращеніи на

общій множитель k:

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x''}{dt^2}x''+\frac{d^2y''}{dt^2}y''+\frac{d^2z''}{dt^2}z''\right)=\Sigma(X'x''+Y'y''+Z'z'').$$

Преобразуемъ лѣвую часть этого уравненія. Легко видѣть, что

$$\frac{d^2x''}{dt^2}x''+\frac{d^2y''}{dt^2}y''+\frac{d^2z''}{dt^2}z''=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx''}{dt}x''+\frac{dy''}{dt}y''+\frac{dz''}{dt}z''\right)-$$
$$-\left[\left(\frac{dx''}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy''}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz''}{dt}\right)^2\right].$$

Слѣдовательно, предыдущему уравненію можно дать видъ:

$$\text{D)}\ \frac{d}{dt}\ \Sigma m\left(\frac{dx''}{dt}x''+\frac{dy''}{dt}y''+\frac{dz''}{dt}\right)=\Sigma(X'x''+Y'y''+Z'z'')+2T,$$

гдѣ снова $2T$—относительная живая сила тѣла.

Формулу D) легко истолковать. Для этого замѣтимъ, что слагающія мгновенной силы, дѣйствующей на точку (x'', y'', z''), равны:

$$m\,\frac{dx'}{dt},\ m\,\frac{dy'}{dt},\ m\,\frac{dz'}{dt}.$$

Если мы приведемъ эти силы къ центру S инерціи, то однимъ изъ элементовъ приведенія будетъ мгновенная пара растяженія, моментъ которой Π_s равенъ:

$$6)\ \Pi_s=\Sigma m\left(\frac{dx'}{dt}x''+\frac{dy'}{dt}y''+\frac{dz'}{dt}z''\right)^{1)}.$$

Точно также, если приведемъ непрерывныя силы $F(X',Y',Z')$ къ точкѣ S, то моментъ Π'_s непрерывной пары растяженія—одного изъ элементовъ приведенія — будетъ

---

[1]) Часть II, § II, VI.

$$7)\ \Pi'_s = \Sigma(X'x'' + Y'y'' + Z'z'')$$ [1]).

Замѣтимъ, что Π_s и Π'_s представляютъ *виріалы* мгновенныхъ и непрерывныхъ силъ относительно центра инерціи. Выраженіе для Π_s можно преобразовать. Изъ формулъ 2) слѣдуетъ:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx''}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{dy''}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + \frac{dz''}{dt}.$$

въ силу чего

$$\Pi_s = \Sigma m\left[\left(\frac{dx_0}{dt} + \frac{dx''}{dt}\right)x'' + \left(\frac{dy_0}{dt} + \frac{dy''}{dt}\right)y'' + \left(\frac{dz_0}{dt} + \frac{dz''}{dt}\right)z''\right] =$$

$$= \frac{dx_0}{dt}\Sigma mx'' + \frac{dy_0}{dt}\Sigma my'' + \frac{dz_0}{dt}\Sigma mz'' + \Sigma m\left(\frac{dx''}{dt}x'' + \frac{dy''}{dt}y'' + \frac{dz''}{dt}z''\right).$$

Но, какъ мы видѣли,

$$\Sigma mx'' = \Sigma my'' = \Sigma mz'' = 0;$$

слѣдовательно,

$$\Pi_s = \Sigma m\left(\frac{dx''}{dt}x'' + \frac{dy''}{dt}y'' + \frac{dz''}{dt}z''\right),$$

а уравненіе D) перейдетъ въ слѣдующее:

$$D')\ \frac{d\Pi_s}{dt} = \Pi'_s + 2T,$$

т. е., *производная по времени момента мгновенной пары растяженія* (виріала мгновенныхъ силъ) *отличается отъ момента непрерывной пары растяженія* (отъ виріала непрерывныхъ силъ) *на величину относительной живой силы.*

Уравненіе D) можно представить еще въ иномъ видѣ.

Изъ формулы

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \varrho^2$$

---

[1]) Часть II, § II, VI.

слѣдуетъ:

$$x''\frac{dx''}{dt}+y''\frac{dy''}{dt}+z''\frac{dz''}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d.}{dt}\varrho^2.$$

Внеся это значеніе въ D), найдемъ:

$$8)\ \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Sigma m\varrho^2=\Sigma(X'x''+Y'y''+Z'z)+2T.$$

Введемъ снова величину

$$\Pi'=\Sigma m\varrho^2$$

главнаго полярнаго момента инерціи. Если Π—начальное значеніе величины Π', φ—линейное расширеніе тѣла, то

$$\Pi'=\varphi^2\Pi;\ ^{1})$$

въ силу чего уравненіе 8) приметъ слѣдующій видъ

$$D'')\,\Pi\frac{d.^2\varphi^2}{dt^2}=2\Sigma(X'x''+Y'y''+Z'z'')+4T.$$

V. Разсмотримъ возможное перемѣщеніе тѣла, заключающееся въ элементарномъ вращеніи $\delta\alpha$ вокругъ оси x''.

Пусть r—разстояніе точки (x'', y'', z'') отъ оси x'', λ—уголъ, образуемый прямой r съ осью y''. Перемѣщеніе, о которомъ идетъ рѣчь, характеризуется формулами:

$$\delta x''=0,\ \delta r=0,\ \delta\lambda=\delta\alpha.$$

Но

$$y''=rcs\lambda,\ z''=rsn\lambda;$$

слѣдовательно,

$$\delta y''=-rsn\lambda\delta\lambda=-z''\delta\alpha,\ \delta z''=rcs\lambda\delta\lambda=y''\delta\alpha.$$

Внеся значенія $\delta x''$, $\delta y''$ и $\delta z''$ въ B), найдемъ по сокращеніи на общій множитель $\delta\alpha$ первое изъ уравненій E):

---

[1]) Часть II, § II, форм. D)

$$E)\ \begin{cases} \Sigma m\left(y''\dfrac{d^2z''}{dt^2}-z''\dfrac{d^2y''}{dt^2}\right)=\Sigma(y''Z'-z''Y'), \\ \Sigma m\left(z''\dfrac{d^2x''}{dt^2}-x''\dfrac{d^2z''}{dt^2}\right)=\Sigma(z''X'-x''Z'), \\ \Sigma m\left(x''\dfrac{d^2y''}{dt^2}-y''\dfrac{d^2x''}{dt^2}\right)=\Sigma(x''Y'-y''X'). \end{cases}$$

Второе и третье получаются изъ B) аналогичнымъ путемъ, если мы предположимъ элементарное вращеніе $\delta\beta$ вокругъ оси y'', а затѣмъ такое же вращеніе $\delta\gamma$ вокругъ оси z''.

Уравненія A), C), D'') и E)—основныя уравненія динамики подобно-измѣняемаго тѣла. При выводѣ ихъ мы слѣдовали *Jacobi* [1]).

Уравненія Е) можно представить въ иномъ видѣ. Примѣняя къ нимъ тожество:

$$m\frac{d^2n}{dt^2}-n\frac{d^2m}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(m\frac{dn}{dt}-n\frac{dm}{dt}\right),$$

легко получаемъ:

$$E_1)\ \frac{dS_1}{dt}=\Sigma(y''Z'-z''Y'),\ \frac{dS_2}{dt}=\Sigma(z''X'-x''Z'),$$
$$\frac{dS_3}{dt}=\Sigma(x''Y'-y''X'),$$

гдѣ

$$E_{II})\ S_1=\Sigma m\left(y''\frac{dz''}{dt}-z''\frac{dy''}{dt}\right), S_2=\Sigma m\left(z''\frac{dx''}{dt}-x''\frac{dz''}{dt}\right)$$
$$S_3=\Sigma m\left(x''\frac{dy''}{dt}-y''\frac{dx''}{dt}\right).$$

Раскроемъ механическое значеніе величинъ S_1, S_2 и S_3. Для этого замѣтимъ, что слагающія мгновенной силы, дѣй-

---

[1]) Vorlesungen über Dynamik. III—V.

ствующей на точку (x'', y'', z''), равны соотвѣтственно

$$m\frac{dx'}{dt},\quad m\frac{dy'}{dt},\quad m\frac{dz'}{dt}.$$

Если мы приведемъ эти силы къ центру инерціи—началу координатъ x'', y'', z''—то однимъ изъ элементовъ приведенія будетъ пара вращенія $((G_s))$, причемъ слагающіе N_1, N_2, N_3 момента пары даются формулами [1]):

$$N_1 = \Sigma m\left(y''\frac{dz'}{dt} - z''\frac{dy'}{dt}\right),$$

$$N_2 = \Sigma m\left(z''\frac{dx'}{dt} - x''\frac{dz'}{dt}\right),$$

$$N_3 = \Sigma m\left(x''\frac{dy'}{dt} - g''\frac{dx'}{dt}\right).$$

Но

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx''}{dt},\quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{dy''}{dt},\quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + \frac{dz''}{dt};$$

слѣдовательно,

$$N_1 = \frac{dz_0}{dt}\Sigma my'' - \frac{dy_0}{dt}\Sigma mz'' + \Sigma m\left(y''\frac{dz''}{dt} - z''\frac{dy''}{dt}\right).$$

Но, по предположенію,

$$\Sigma my'' = \Sigma mz'' = 0,$$

откуда

$$N_1 = \Sigma m\left(y''\frac{dz''}{dt} - z''\frac{dy''}{dt}\right) = S_1.$$

Точно также найдемъ:

$$N_2 = S_2,\quad N_3 = S_3.$$

---

[1]) Часть II, § II, VI.

Итакъ *величины* S_1, S_2 *и* S_3 *представляютъ слагающіе параллельно неподвижнымъ осямъ координатъ момента мгновенной пары вращенія, одного изъ элементовъ приведенія мгновенныхъ силъ къ центру инерціи.*

§ II. Преобразованіе основныхъ уравненій.

Здѣсь мы займемся преобразованіемъ основныхъ уравненій къ главнымъ осямъ инерціи тѣла.

Примемъ эти прямыя за оси координатъ x, y, z. Cs'ы угловъ, образуемыхъ новыми осями съ прежними, указываются таблицей:

1)

	x	y	z
x''	a_1	a_2	a_3
y''	b_1	b_2	b_3
z''	c_1	c_2	c_3

Вспомогательныя формулы. Величины a_i, b_i, c_i $(i=1, 3, 3)$ удовлетворяютъ извѣстнымъ соотношеніямъ:

$$2)\begin{cases} a_1^2+b_1^2+c_1^2=1, \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2=1, \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2=1, \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0, \\ a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0, \\ a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1=0, \end{cases}$$

Откуда слѣдуетъ:

$$4)\begin{cases} a_1=b_2c_3-b_3c_2, & b_1=c_2a_3-c_3a_2, & c_1=a_2b_3-a_3b_2, \\ a_2=b_3c_1-b_1c_3, & b_2=c_3a_1-c_1a_3, & c_2=a_3b_1-a_1b_3, \\ a_3=b_1c_2-b_2c_1, & b_3=c_1a_2-c_2a_1, & c_3=a_1b_2-a_2b_1. \end{cases}$$

За доказательствами этихъ формулъ отсылаю къ извѣстному сочиненію Lamé [1]).

---

[1]) Leçons sur les coordonneés curvilignes. Стр. 4.

Положимъ, кромѣ того, для краткости:

$$5)\quad \begin{cases} a_3\dfrac{da_2}{dt}+b_3\dfrac{db_2}{dt}+c_3\dfrac{dc_2}{dt}=p, \\ a_1\dfrac{da_3}{dt}+b_1\dfrac{db_3}{dt}+c_1\dfrac{dc_3}{dt}=q, \\ a_2\dfrac{da_1}{dt}+b_2\dfrac{db_1}{dt}+c_2\dfrac{dc_1}{dt}=r. \end{cases}$$

Возьмемъ производную по времени первой изъ формулъ 2) и третьей изъ формулъ 3).

Это даетъ намъ:

$$a_1\frac{da_1}{dt}+b_1\frac{db_1}{dt}+c_1\frac{dc_1}{dt}=o,$$

$$a_3\frac{da_1}{dt}+b_3\frac{db_1}{dt}+c_3\frac{dc_1}{dt}=-q,$$

въ силу второй изъ формулъ 5). Умножимъ теперь эти уравненія и послѣднее изъ 5) сначала на a_1, a_3 и a_2, затѣмъ на b_1, b_3 и b_2 и наконецъ на c_1, c_3 и c_2 соотвѣтственно. Складывая каждый разъ произведенія, найдемъ въ силу 2) и 3) первую строчку системы 6):

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{da_1}{dt}=a_2r-a_3q,\ \dfrac{db_1}{dt}=b_2r-b_3q,\ \dfrac{dc_1}{dt}=c_2r-c_3q, \\ \dfrac{da_2}{di}=a_3p-a_1r,\ \dfrac{db_2}{dt}=b_3p-b_1r,\ \dfrac{dc_2}{dt}=c_3p-c_1r, \\ \dfrac{da_3}{dt}=a_1q-a_2p,\ \dfrac{db_3}{dt}=b_1q-b_2p,\ \dfrac{dc_3}{dt}=c_1q-c_2p, \end{cases}$$

остальныя уравненія которой получаются аналогичнымъ путемъ.

Выраженія координатъ x'', y'' и z''. Связь между прежними и новыми координатами выражается при помощи формулъ:

$$7)\quad \begin{cases} x''=a_1x+a_2y+a_3z, & x=a_1x''+b_1y''+c_1z'', \\ y''=b_1x+b_2y+b_3z, & y=a_2x''+b_2y''+c_2z'', \\ z''=c_1x+c_2y+c_3z. & z=a_3x''+b_3y''+c_3z''. \end{cases}$$

Такъ какъ началомъ координатъ x, y, z служитъ центръ инерціи, а оси совпадаютъ съ главными осями инерціи, то имѣютъ мѣсто уравненія

$$8)\quad \Sigma mx=\Sigma my=\Sigma mz=\Sigma myz=\Sigma mzx=\Sigma mxy=0.$$

Введемъ главные моменты инерціи тѣла:

$$9)\quad P'=\Sigma m(y^2+z^2),\ \ Q'=\Sigma m(z^2+x^2),\ \ R'=\Sigma m(x^2+y^2).$$

Если P, Q и R—ихъ начальныя значенія, φ—линейное расширеніе тѣла, то, какъ мы знаемъ, (Часть II, форм. В):

$$10)\quad P'=\varphi^2P,\ \ Q'=\varphi^2Q,\ \ R'=\varphi^2R.$$

Выраженія для $\frac{dx''}{dt}$, $\frac{dy''}{dt}$ и $\frac{dz''}{dt}$. Въ формулахъ 7) величины a_i, b_i, c_i $(i=1, 2, 3)$, опредѣляющія положеніе новой системы осей относительно прежней, зависитъ отъ времени. Что же касается величинъ x, y и z, то онѣ также зависятъ отъ времени, но эта зависимость спеціальнаго характера, вытекающая изъ того, что тѣло должно оставаться подобнымъ самому себѣ во все время движенія.

Пусть ϱ—разстояніе точки (x, y, z) отъ центра инерціи, α, β и γ—cs'ы угловъ, образуемыхъ прямой ϱ съ главными осями инерціи x, y, z. Изъ опредѣленія тѣла слѣдуетъ, что величины α, β и γ не измѣняются со временемъ.

Слѣдовательно, формулы:

$$x=\varrho\alpha,\ \ y=\varrho\beta,\ \ z=\varrho\gamma,$$

дадутъ:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\varrho}{dt}\alpha,\ \frac{dy}{dt}=\frac{d\varrho}{dt}\beta,\ \frac{dz}{dt}=\frac{d\varrho}{dt}\gamma.$$

Но, если

$$11)\ \eta=\frac{1}{\varphi}\ \frac{d\varphi}{dt}$$

—скорость лучистаго расширенія въ моментъ t, то

$$\frac{d\varrho}{dt}=\varrho\eta,\ \text{(Часть I, § II, форм. C)}.$$

Вставляя эти значенія въ выраженія $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, найдемъ:

$$\frac{dx}{dt}=\eta\varrho\alpha,\ \frac{dy}{dt}=\eta\varrho\beta,\ \frac{dz}{dt}=\eta\varrho\gamma$$

или

$$12)\ \frac{dx}{dt}=\eta x,\ \frac{dy}{dt}=\eta y,\ \frac{dz}{dt}=\eta z.$$

Въ этихъ формулахъ величина η одинакова для всѣхъ точекъ $(x,\ y,\ z)$ и зависитъ только отъ времени.

Продифференцируемъ теперь формулы 7) по времени. Принимая въ соображенія формулы 12), найдемъ:

$$13)\ \begin{cases} \frac{dx''}{dt}=x\frac{da_1}{dt}+y\frac{da_2}{dt}+z\frac{da_3}{dt}+\eta\,(a_1x+a_2y+a_3z), \\ \frac{dy''}{dt}=x\frac{db_1}{dt}+y\frac{db_2}{dt}+z\frac{db_3}{dt}+\eta\,(b_1x+b_2y+b_3z), \\ \frac{dz''}{dt}=x\frac{dc_1}{dt}+y\frac{dc_2}{dt}+z\frac{dc_3}{dt}+\eta\,(c_1x+c_2y+c_3z), \end{cases}$$

или въ силу тѣхъ же формулъ 7)

$$13')\left\{\begin{aligned}\frac{dx''}{dt}&=x\frac{da_1}{dt}+y\frac{da_2}{dt}+z\frac{da_3}{dt}+\eta x'',\\ \frac{dy''}{dt}&=x\frac{db_1}{dt}+y\frac{db_2}{dt}+z\frac{db_3}{dt}+\eta y''\\ \frac{dz''}{dt}&=x\frac{dc_1}{dt}+y\frac{dc_2}{dt}+z\frac{dc_3}{dt}+\eta z''.\end{aligned}\right.$$

Къ этимъ формуламъ нужно присоединить тѣ, которыя получаются по дифференцированіи формулъ 2):

$$14)\left\{\begin{aligned}a_1\frac{da_1}{dt}+b_1\frac{db_1}{dt}+c_1\frac{dc_1}{dt}&=0,\\ a_2\frac{da_2}{dt}+b_2\frac{db_2}{dt}+c_2\frac{dc_2}{dt}&=0,\\ a_3\frac{da_3}{dt}+b_3\frac{db_3}{dt}+c_3\frac{dc_3}{dt}&=0.\end{aligned}\right.$$

Умножимъ формулы 12) сначала на a_1, b_1, c_1, затѣмъ на a_2, b_2, c_2 и наконецъ на a_3, b_3, c_3 соотвѣтственно. Складывая каждый разъ произведенія и принимая въ соображеніе формулы 14), 7) и 5), получимъ:

$$15)\left\{\begin{aligned}a_1\frac{dx''}{dt}+b_1\frac{dy''}{dt}+c_1\frac{dz''}{dt}&=qz-ry+\eta x,\\ a_2\frac{dx''}{dt}+b_2\frac{dy''}{dt}+c_2\frac{dz''}{dt}&=rx-pz+\eta y,\\ a_3\frac{dx''}{dt}+b_3\frac{dy''}{dt}+c_3\frac{dz''}{dt}&=py-qx+\eta z.\end{aligned}\right.$$

Механическое значеніе величинъ p, q и r. Лѣвыя части формулъ 13) или 13') представляютъ слагающія v_1, v_2, v_3 параллельно осямъ x'', y'' и z'' скорости v, которой обладаетъ въ моментъ t точка (x'', y'', z'') въ относительномъ движеніи

тѣла вокругъ центра инерціи. Разлагая v параллельно осямъ x, y, z на слагающія v_x, v_y v_z, имѣемъ:

$$v_x = a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1 v_3,$$

$$v_y = a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2 v_3,$$

$$v_z = a_3 v_1 + b_3 v_2 + c_3 v_3,$$

какъ это видно изъ таблицы 1). Въ силу 15) эти формулы примутъ слѣдующій видъ:

$$v_x = qz - ry + \eta x = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$v_y = rx - pz + \eta y = \mu_1 + \mu_2.$$

$$v_x = py - qx + \eta z = v_1 + v_2,$$

гдѣ

$$\lambda_1 = qz - ry,\ \mu_1 = rx - pz,\ v_1 = py - qx,$$

$$\lambda_2 = \eta x, \qquad \mu_2 = \eta y, \qquad v_2 = \eta z.$$

Эти формулы показываютъ, что скорость v точки (x, y, z) есть геометрическая сумма двухъ скоростей: v' (λ_1, μ_1, v_1) и v'' (λ_2, μ_2, v_2). Изъ выраженій слагающихъ λ_2, μ_2, v_2 слѣдуетъ:

$$\eta = \frac{\lambda_2}{x} = \frac{\mu_2}{y} = \frac{v_2}{z} = \frac{v''}{\varrho};\ v'' = \varrho\eta.$$

Здѣсь ϱ—разстояніе точки (x, y, z) отъ центра инерціи. Эти уравненія показываютъ, что скорость v'' направлена по прямой ϱ. Кромѣ того, изъ выраженія скорости v'' слѣдуетъ, что ею точка x, y, z обязана лучистому расширенію со скоростью η вокругъ центра инерціи.

Предыдущія значенія слагающихъ λ_1, μ_1, v_1, скорости v' показываютъ, что скорость v'' равна нулю въ точкахъ прямой:

$$\alpha)\ \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

Эта прямая проходитъ чрезъ центръ инерціи и образуетъ съ осями координатъ углы α, β, γ, опредѣляемые формулами:

$$\frac{cs\alpha}{p}=\frac{cs\beta}{q}=\frac{cs\gamma}{r}=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Далѣе значенія λ_1, μ_1 и ν_1 даютъ:

$$\lambda_1 x+\mu_1 y+\nu_1 z=\lambda_1 p+\mu_1 q+\nu_1 r=0,$$

$$\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=\nu'^2=(qz-ry)^2+(rx-pz)^2+(py-qx)^2=$$
$$=(p^2+q^2+r^2)(x^2+y^2+z^2)-(px+qy+rz)^2.$$

Первая строчка показываетъ, что скорость ν' перпендикулярна къ плоскости, проходящей чрезъ точку (x, y, z) и прямую α). Преобразуемъ третью формулу.

Пусть снова ϱ—разстояніе точки (x, y, z) отъ центра инерціи, ε—уголъ между ϱ и прямой α. По извѣстной формулѣ

$$cs\varepsilon=\frac{x}{\varrho}\,cs\alpha+\frac{y}{\varrho}\,cs\beta+\frac{z}{\varrho}cs\gamma,$$

или, полагая:

$$p^2+q^2+r^2=\omega^2,$$

$$cs\varepsilon=\frac{px+qr+rz}{\varrho\omega},$$

въ силу предыдущихъ значеній $cs\alpha$, $cs\beta$ и $sc\gamma$. Слѣдовательно, формула для ν'^2 приметъ видъ:

$$\nu'^2=\varrho^2\omega^2-\varrho^2\omega^2cs^2\varepsilon,$$

откуда

$$\nu'=\varrho\omega sn\varepsilon=\omega d,$$

если d—разстояніе точки (x, y, z) отъ прямой α. Изъ этой формулы, а также изъ сказаннаго выше о направленіи ско-

рости ν', видно, что величины p, q и r представляютъ слагающія параллельно осямъ x, y и z угловой скорости ω вращенія вокругъ прямой α [1]).

Преобразованіе основныхъ уравненій. Теперь мы можемъ перейти къ преобразованію уравненій A), C), D'') и E). Для удобства ссылокъ мы ихъ снова перепишемъ:

$$A)\ M\frac{d^2x_0}{dt^2}=\Sigma X', M\frac{d^2y_0}{dt^2}=\Sigma Y', M\frac{d^2z_0}{dt^2}=\Sigma Z'.$$

$$C)\ T=\int_{t_0}^{t}dt\,\Sigma\left(X'\frac{dx''}{dt}+Y'\frac{dy''}{dt}+Z'\frac{dz''}{dt}\right)+T_0.$$

$$D'')\ \Pi\frac{d^2\varphi}{dt^2}=2\Sigma(X'x''+Y'y''+Z'z'')+4T.$$

$$E)\left\{\begin{aligned}&\Sigma m\left(y''\frac{d^2z''}{dt^2}-z''\frac{d^2y''}{dt^2}\right)=\Sigma(y''Z'-z''Y'),\\&\Sigma m\left(z''\frac{d^2x''}{dt^2}-x''\frac{d^2z''}{dt^2}\right)=\Sigma(z''X'-x''Z'),\\&\Sigma m\left(x''\frac{d^2y''}{dt^2}-y''\frac{d^2x''}{dt^2}\right)=\Sigma(x''Y'-y''X').\end{aligned}\right.$$

Въ этихъ формулахъ M—масса тѣла, x_0, y_0, z_0—координаты центра инерціи, m—масса точки (x'', y'', z''), на которую дѣйствуетъ непрерывная сила P (X', Y', Z'). Кромѣ того, Π—начальное значеніе главнаго полярнаго момента инерціи, $2T$—живая сила тѣла въ относительномъ движеніи вокругъ центра инерціи, φ—линейное расширеніе.

Разложимъ силу P параллельно осямъ x, y, z на слагающія X, Y и Z. Между величинами X', Y' и Z', X, Y и Z

---

[1]) Ср. *Schell.* Theorie der Bewegung und der Kräfte. 1879. t. I, стр. 273—274; или *Kirchhoff.* Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. 1876, стр. 45—49.

имѣются зависимости:

$$16)\ \begin{cases} X' = a_1 X + a_2 Y + a_3 Z, X = a_1 X' + b_1 Y' + c_1 Z', \\ I' = b_1 X + b_2 Y + b_3 Z, I = a_2 X' + b_2 Y' + c_2 Z', \\ Z' = c_1 X + c_2 Y + c_3 Z, Z = a_3 X' + b_3 Y' + c_3 Z'. \end{cases}$$

какъ это видно изъ таблицы 1).

Внеся эти значенія въ A), получимъ:

$$A_1)\ \begin{cases} M\frac{d^2x_0}{dt^2} = a_1 \Sigma X + a_2 \Sigma Y + a_3 \Sigma Z, \\ M\frac{d^2y_0}{dt^2} = b_1 \Sigma X + b_2 \Sigma Y + b_3 \Sigma Z, \\ M\frac{d^2z_0}{dt} = c_1 \Sigma X + c_2 \Sigma Y + c_3 \Sigma Z. \end{cases}$$

Теперь преобразуемъ выраженіе

$$X'\frac{dx''}{dt} + Y'\frac{dy''}{dt} + Z'\frac{dz''}{dt}$$

съ подстановкой значеній 16) въ слѣдующее

$$\mathbf{X}\left(a_1\frac{dx''}{dt} + b_1\frac{dy''}{dt} + c_1\frac{dz''}{dt}\right) + Y\left(a_2\frac{dx''}{dt} + b_2\frac{dy''}{dt} + c_2\frac{dz''}{dt}\right) +$$

$$+ \mathbf{Z}\left(a_3\frac{dx''}{dt} + b_3\frac{dy''}{dt} + c_3\frac{dz''}{dt}\right) =$$

$$= \gamma(\mathbf{X}x + Yy + Zz) + p(yZ - zY) + q(zX - xZ) + r(xY - y\mathbf{X}),$$

въ силу формулъ 15).

Слѣдовательно, формула C) приметъ слѣдующій видъ:

$$C_1)\ T-T_0=\int_{t_0}^{t} \eta dt\Sigma(Xx+Yy+Zz)+\int_{t_0}^{t} pdt\,\Sigma(yZ-zY)+$$

$$+\int_{t_0}^{t} qdt\Sigma(zX-xZ)+\int_{t_0}^{t} rdt\Sigma(xY-yX).$$

Изъ формулъ 7) и 16) легко получаемъ въ силу 2) и 3):

$$X'x''+Y'y''+Z'z''=Xx+Yy+Zz,$$

въ справедливости которой можно удостовѣрится непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, обѣ части этой формулы представляютъ геометрическое произведеніе $P\varrho cs\,(P,\varrho)$ силы P и разстоянія ϱ отъ центра инерціи точки приложенія силы P.

Въ силу этой формулы можно написать:

$$D'_1)\ \Pi\frac{d^2\varphi}{dt^2}=2\,\Sigma(Xx+Yy+Zz)+4T.$$

Намъ остается преобразовать систему уравненій E).

Ихъ можно, какъ мы видѣли, замѣнить слѣдующими:

$$E_1)\frac{dS_1}{dt}=\Sigma(y''Z'-z''Y'),\frac{dS_2}{dt}=\Sigma(z''X'-x''Z'),\frac{dS_3}{dt}=\Sigma(x''Y'-y''X'),$$

гдѣ

$$E_{11})\,S_1=\Sigma m\left(y''\frac{dz''}{dt}-z''\frac{dy''}{dt}\right),\ S_2=\Sigma m\left(z''\frac{dx''}{dt}-x''\frac{dz''}{dt}\right),$$

$$S_3=\Sigma m\left(x''\frac{dy''}{dt}-y''\frac{dx''}{dt}\right).$$

Внесемъ въ правыя части уравненій E_1) выраженія 7) и 16) величинъ x'', y'', z'', X', Y' и Z'.

Замѣтимъ предварительне, что величину

$$y''Z'-z''Y'=(b_1x+b_2y+b_3z)(c_1X+c_2Y+c_3Z)-$$
$$-(c_1x+c_2y+c_3z)(b_1X+b_2Y+b_3Z)=(xY-yX)(b_1c_2-b_2c_1)+$$
$$+(zX-xZ)(b_3c_1-b_1c_3)+(yZ-zY)(b_2c_3-b_3c_2)$$

можно въ силу формулъ 4) представить въ такомъ видѣ:

$$y''Z'-z''Y'=a_3(xY-yX)+a_2(zX-xZ)+a_1(yZ-zY).$$

Точно также найдемъ:

$$z''X'-x''Z'=b_3(xY-yX)+b_2(zX-xZ)+b_1(yZ-zY),$$
$$x''Y'-y''X'=c_3(xY-yZ)+c_2(zX-xZ)+c_1(yZ-zY).$$

Слѣдовательно, указанная подстановка дастъ:

$$\frac{dS_1}{dt}=a_1\Sigma(yZ-zY)+a_2\Sigma(zX-xZ)+a_3\Sigma(xY-yX),$$

$$\frac{dS_2}{dt}=b_1\Sigma(yZ--xY)+b_2\Sigma(zX-xZ)+b_3\Sigma(xY-yX),$$

$$\frac{dS_3}{dt}=c_1\Sigma(yZ-zY)+c_2\Sigma(zX-xZ)+c_3\Sigma(xY-yX).$$

Умножимъ эти уравненія сначала на a_1, b_1, c_1, затѣмъ на a_2, b_2, c_2 и наконецъ на a_3, b_3, c_3 соотвѣтственно. Складывая каждый разъ произведенія и пользуясь формулами 2) и 3), получимъ уравненія:

$$a_1\frac{dS_1}{dt}+b_1\frac{dS_2}{dt}+c_1\frac{dS_3}{dt}=\Sigma(yZ-zY),$$

$$a_2\frac{dS_1}{dt}+b_2\frac{dS_2}{dt}+c_2\frac{dS_3}{dt}=\Sigma(zX-xZ),$$

$$a_3\frac{dS_1}{dt}+b_2\frac{dS_2}{dt}+c_3\frac{dS_3}{dt}=\Sigma(xY-yX),$$

которыя можно представить еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$E'')\begin{cases}\frac{d}{dt}(a_1S_1+b_1S_2+c_1S_3)=S_1\frac{da_1}{dt}+S_2\frac{db_1}{dt}+S_3\frac{dc_1}{dt}+\Sigma(yZ-zY),\\ \frac{d}{dt}(a_2S_1+b_2S_2+c_2S_3)=S_1\frac{da_2}{dt}+S_1\frac{db_2}{dt}+S_3\frac{dc_2}{dt}+\Sigma(zX-xZ),\\ \frac{d}{dt}(a_3S_1+b_3S_2+c_3S_3)=S_3\frac{da_3}{dt}+S_1\frac{db_3}{dt}+S_3\frac{dc_3}{dt}+\Sigma(xY-yX).\end{cases}$$

Перейдемъ къ опредѣленію величинъ S_1, S_2 и S_3. Изъ формулъ 13′) слѣдуетъ:

$$\alpha)\ y''\frac{dz''}{dt}-z''\frac{dy''}{dt}=$$

$$=(b_1x+b_2y+b_3z)\left(x\frac{dc_1}{dt}+y\frac{dc_2}{dt}+z\frac{dc_3}{dt}\right)-$$

$$-(c_1x+c_2y+c_3z)\left(x\frac{db_1}{dt}+y\frac{db_2}{dt}+z\frac{db_3}{dt}\right),$$

откуда

$$y''\frac{dz''}{dt}-z''\frac{dy''}{dt}=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx,$$

гдѣ коэффиціенты A, D, C, D, E и F опредѣленнымъ образомъ зависятъ отъ b_i, c_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ и ихъ производныхъ по времени.

Слѣдовательно,

$$S_1=\Sigma m\left(y''\frac{dz''}{dt}-z''\frac{dy''}{dt}\right)=A\Sigma mx^2+B\Sigma my^2+C\Sigma mz^2+D\Sigma mxy+$$

$$+E\Sigma myz+F\Sigma mzx,$$

или въ силу формулъ 8):

$$S_1=A\Sigma mx^2+B\Sigma my^2+C\Sigma mz^2.$$

Изъ формулы α) легко находимъ:

$$A=b_1\frac{dc_1}{dt}-c_1\frac{db_1}{dt},\ B=b_2\frac{dc_2}{dt}-c_2\frac{db_2}{dt},\ C=b_3\frac{dc_3}{dt}-c_3\frac{db_3}{dt}.$$

Но формулы 6) даютъ:

$$A=b_1\frac{dc_1}{dt}-c_1\frac{db_1}{dt}=b_1(c_2r-c_3q)-c_1(b_2r-b_3q)=r(b_1c_2-c_1b_2)+$$
$$+q(b_3c_1-c_3b_1)=a_2q+a_3r,$$

въ силу формулъ 4). Точно также найдемъ:

$$B=b_2\frac{dc_2}{dt}-c_2\frac{db_2}{dt}=a_3r+a_1p,$$

$$C=b_2\frac{dc_3}{dt}-c_3\frac{db_3}{dt}=a_1p+a_2q.$$

Слѣдовательно,

$$S_1=(a_2q+a_3r)\Sigma mx^2+(a_3r+a_1p)\Sigma my^2+(a_1p+a_2q)\Sigma mz^2=$$
$$=a_1p\Sigma m(y^2+z^2)+a_2q\Sigma m(z^2+x^2)+a_3r\Sigma m(x^2+y^2),$$

или, введя главные моменты инерціи P', Q', R' (форм. 9), получимъ первое изъ уравненій 17):

$$17)\quad \begin{cases} S_1=a_1pP'+a_2qQ'+a_3rR'. \\ S_2=b_1pP'+b_2qQ'+b_3rR', \\ S_3=c_1pP'+c_2qQ'+c_3rR'. \end{cases}$$

Остальныя получаются такимъ образомъ.

Умножимъ эти сравненія сначала на a_1, b_1, c_1, затѣмъ на a_2, b_2, c_2 и наконецъ на a_3, b_3, c_3. Складывая каждый разъ произведенія и принимая во вниманіе формулы 2) и 3), найдемъ:

$$18)\left\{\begin{aligned} a_1S_1+b_1S_2+c_1S_3&=pP',\\ a_2S_1+b_2S_2+c_2S_3&=qQ',\\ a_3S_1+b_3S_2+c_3S_3&=rR'.\end{aligned}\right.$$

Эти формулы показываютъ, что величины pP', qQ', rR' суть слагающіе параллельно главнымъ осямъ инерціи момента мгновенной пары вращенія.

Умножимъ теперь тѣ же уравненія 17) сначала на $\frac{da_1}{dt}$, $\frac{db_1}{dt}$, $\frac{dc_1}{dt}$, затѣмъ на $\frac{da_2}{dt}$, $\frac{db_2}{dt}$, $\frac{dc_2}{dt}$ и наконецъ на $\frac{da_3}{dt}$, $\frac{db_3}{dt}$, $\frac{dc_3}{dt}$ соотвѣтственно. Складывая каждый разъ результаты и пользуясь формулами 2), 3) и 5), легко найдемъ:

$$19)\left\{\begin{aligned} S_1\frac{da_1}{dt}+S_2\frac{db_1}{dt}+S_3\frac{dc_1}{dt}&=(Q'-R')qr,\\ S_1\frac{da_2}{dt}+S_2\frac{db_2}{dt}+S_3\frac{dc_2}{dt}&=(R'-P')rp,\\ S_1\frac{da_3}{dt}+S_2\frac{db_3}{dt}+S_3\frac{dc_3}{dt}&=(P'-Q')pq.\end{aligned}\right.$$

Слѣдовательно, уравненія E'') въ силу 18) и 19) примутъ слѣдующій видъ:

$$E'_1)\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P'p)&=(Q'-R')qr+\Sigma(yZ-zY),\\ \frac{d}{dt}(Q'q)&=(R'-P')rp+\Sigma(zX-xZ),\\ \frac{d}{dt}(R'r)&=(P'-Q')pq+\Sigma(xY-yX).\end{aligned}\right.$$

Это искомыя уравненія. Аналогія между ними и извѣстными уравненіями Эйлера бросается въ глаза. Такимъ образомъ доказана для подобно-измѣняемаго тѣла справедливость замѣчанія, сдѣланнаго Лагранжемъ [1]), по которому три Эйле-

---

[1]) Mècanique Analytique. 1855, t. II, Fragments, p. 376.

ровыхъ уравненія вращенія твердаго тѣла сохраняютъ свой видъ для всякаго измѣняемаго тѣла. Общее доказательство этого предложенія дано недавно *Voss*'омъ [1]).

Движеніе тѣла будетъ вполнѣ извѣстно, если намъ будутъ извѣстны въ функціи отъ времени координаты x_0, y_0 и z_0 центра инерціи; величины a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$), опредѣляющія положеніе главныхъ осей инерціи x, y, z относительно неподвижныхъ осей x', y', z', и линейное расширеніе φ.

Величины x_0, y_0 и z_0 будутъ найдены помощью уравненій A) или A_1), а изъ уравненій C_1), D'_1), E'_1) опредѣлятся величины T, p, q, r и φ, если изъ этихъ уравненій по формуламъ 9) будутъ исключены главные моменты инерціи P', Q' и R'. Величины a_i, b_i, c_i наконецъ мы опредѣлимъ изъ 9 уравненій 2), 3) и 5).

Въ слѣдующихъ параграфахъ будутъ изслѣдованы нѣкоторые частные случаи движенія подобно-измѣняемаго тѣла.

§ III. Задача Poinsot.

Здѣсь мы разсмотримъ тотъ случай, когда непрерывныя силы P отсутствуютъ.

Въ данномъ случаѣ, какъ величины X', Y' и Z', такъ и величины X, Y и Z равны нулю. Слѣдовательно, основныя уравненія теперь имѣютъ слѣдующій видъ:

$$A_1)\quad \frac{d^2x_0}{dt^2}=0,\ \frac{d^2y_0}{dt^2}=0,\ \frac{d^2z_0}{dt^2}=0,$$

$$C_1)\quad T=T_0,\quad D'_1)\quad \Pi\frac{d.^2\varphi^2}{dt^2}=4T,$$

$$E'_1)\quad \frac{d(P'p)}{dt}=(Q'-R')qr,\ \frac{d(Q'q)}{dt}=(R'-P')rp,\ \frac{d(R'r)}{dt}=(P'-Q')pq.$$

Кромѣ того, уравненія E_1) будутъ:

$$E_1)\quad \frac{dS_1}{dt}=0,\ \frac{dS_2}{dt}=0,\ \frac{dS_3}{dt}=0.$$

---

[1]) Mathematische Annalen. 1886 г., t. 27, стр. 569—574.

Уравненія A_1) даютъ:

$$x_0 = m_1 t + n_1,\ y_0 = m_2 t + n_2,\ z_0 = m_3 t + n_3,$$

откуда

$$\frac{x_0 - n_1}{m_1} = \frac{y_0 - n_2}{m_2} = \frac{z_0 - n_3}{m_3}$$

т. е. *центръ инерціи движенія равномѣрно по прямой линіи.*

Изъ C_1) и D'_1 слѣдуетъ:

$$\Pi \frac{d.^2\varphi^2}{dt^2} = 4 T_0,$$

откуда

$$\Pi\varphi^2 = 2 T_0 t^2 + At + B,$$

гдѣ A и B—произвольныя постоянныя. Если начнемъ счетъ времени съ того момента, когда $\varphi = 1$, то

$$B = \Pi;$$

слѣдовательно,

$$\alpha)\ \Pi\varphi^2 = 2 T_0 t^2 + At + \Pi.$$

Итакъ *квадратъ линейнаго расширенія есть квадратичная функція отъ времени.*

Перейдемъ къ уравненіямъ E'_1). Умножая ихъ сначала на $P'p$, $Q'q$, $R'r$, а затѣмъ на p, q, r, найдемъ:

$$1)\ \begin{cases} P'p\,\dfrac{d(P'p)}{dt} + Q'q\dfrac{d.(Q'q)}{dt} + R'r\dfrac{d.(R'r)}{dt} = 0. \\ p.\,\dfrac{d(P'p)}{dt} + q\,\dfrac{d.(Q'q)}{dt} + r\,\dfrac{d.(R'r)}{dt} = 0. \end{cases}$$

Первое изъ этихъ уравненій можно интегрировать, что дастъ:

$$P'^2 p^2 + Q'^2 q^2 + R'^2 r^2 = G_1^{\ 2},$$

гдѣ G_1—постоянная величина. Если мы внесемъ въ это урав-

неніе значенія 10) (§ II) величинъ P', Q', R', то оно приметъ видъ:

$$2)\quad P^2p^2+Q^2q^2+R^2r^2=\frac{G_1^{\,2}}{\varphi^4}.$$

Здѣсь величины P, Q и R—главные моменты инерціи тѣла въ моментъ: $t=0$—постоянны. Между ними и величиной Π существуетъ зависимость.

Дѣйствительно, если x^0, y^0, z^0—начальныя значенія координатъ x, y, z, то, по опредѣленію,

$$P=\Sigma m(y^{02}+z^{02}),\ Q=\Sigma m(z^{02}+x^{02}),\ R=\Sigma m(x^{02}+y^{02}),$$

$$\Pi=\Sigma m(x^{02}+y^{02}+z^{02}),$$

откуда

$$2\Pi=P+Q+R.$$

Перейдемъ ко второму изъ уравненій 1). Произведя указанныя дѣйствія, получимъ:

$$P'p\frac{dp}{dt}+Q'q\frac{dq}{dt}+R'r\frac{dr}{dt}+p^2\frac{dP'}{dt}+q^2\frac{dQ'}{dt}+r^2\frac{dR'}{dt}=0$$

Внеся значенія: $P'=P.\varphi^2$, $Q'=Q.\varphi^2$, $R'=R.\varphi^2$, найдемъ:

$$\varphi\left(Pp\frac{dp}{dt}+Qq\frac{dq}{dt}+Rr\frac{dr}{dt}\right)+2\frac{d\varphi}{dt}(Pp^2+Qq^2+Rr^2)=0$$

или

$$\frac{P.2p\frac{dp}{dt}+Q.2q\frac{dq}{dt}+R.2r\frac{dr}{dt}}{Pp^2+Qq^2+Rr^2}+\frac{4}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=0.$$

Это уравненіе интегрируется при помощи логариѳмовъ. Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, получаемъ:

$$3)\quad Pp^2+Qq^2+Rr^2=\frac{G_2^{\,2}}{\varphi^4}$$

гдѣ G_2—новая постоянная величина.

Пусть

$$4)\quad P<Q<R.$$

Изъ уравненій 2) и 3) легко найдемъ:

$$PG_2^{\,2}<G_1^{\,2}<RG_2^{\,2};$$

мы вправѣ, слѣдовательно, положить:

$$5)\quad G_1^{\,2}-PG_2^{\,2}=B^2,\ \ RG_2^{\,2}-G_1^{\,2}=C^2.$$

Рѣшая уравненія 2) и 3) относительно p^2 и r^2, найдемъ въ силу 5):

$$6)\quad \begin{cases} Pp^2(R-P)=\dfrac{C^2-Qq^2\varphi^4(R-Q)}{\varphi^4} \\[2ex] Rr^2(R-P)=\dfrac{B^2-Qq^2\varphi^4(Q-P)}{\varphi^4} \end{cases}$$

Внесемъ эти значенія во второе изъ уравненій E_1). Если вмѣсто P', Q', R' подставимъ ихъ значенія 10) (§ II), то получимъ:

$$\frac{d(q\varphi^2)}{dt}=\frac{1}{\varphi^2}\cdot\frac{\sqrt{[C^2-Qq^2\varphi^4(R-Q)][B^2-Qq^2\varphi^4(Q-P)]}}{Q.\sqrt{PR}}.$$

Положимъ въ этомъ уравненіи:

$$7)\quad q\varphi^2=q_1.$$

Тогда оно приметъ видъ:

$$\frac{dq_1}{\sqrt{[C^2-Q(R-Q)q_1^{\,2}][B^2-Q(Q-P)q_1^{\,2}]}}=\frac{1}{Q\sqrt{PR}}\frac{dt}{\varphi^2}$$

или, полагая для краткости:

$$8)\quad \frac{Q(Q-P)}{B^2}=\lambda^2,\ \ \frac{Q(R-Q)}{C^2}=\mu^2,$$

$$\frac{dq_1}{\sqrt{(1-\lambda^2q_1^{\,2})(1-\mu^2q_1^{\,2})}}=\frac{BC}{Q\sqrt{PR}}\frac{dt}{\varphi^2}.$$

Пусть

$$\lambda^2 > \mu^2.$$

Полагая въ полученномъ уравненіи:

$$9)\quad \frac{\mu^2}{\lambda^2} = k^2 = \frac{R-Q}{Q-P} \cdot \left(\frac{B}{C}\right)^2;\ 10)\ \lambda q_1 = x,$$

найдемъ послѣ простыхъ передѣлокъ:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{C\sqrt{Q-P}}{\sqrt{PQR}} \cdot \frac{dt}{\varphi^2},$$

откуда

$$11)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{C\sqrt{Q-P}}{\sqrt{PQR}} \int_{t_0}^t \frac{dt}{\varphi^2},$$

гдѣ t_0—новая постоянная произвольная.

Положимъ для краткости:

$$12)\quad \frac{C\sqrt{Q-P}}{\sqrt{PQR}} \int_{t_0}^t \frac{dt}{\varphi^2} = u.$$

Изъ вида α) функціи φ^2 слѣдуетъ, что величина u выражается чрезъ логариѳмъ или чрезъ $arctg$.

Изъ 11) слѣдуетъ:

$$x = snamu;$$

слѣдовательно, въ силу формулъ 7) и 9):

$$q = \frac{1}{\lambda\varphi^2} . sn.amu$$

или на основаніи 8),

$$\beta)\quad q = \frac{B}{\sqrt{Q(Q-P)}} \frac{sn.amu}{\varphi^2}$$

Вставляя это значеніе въ формулы 6), найдемъ:

$$p = \frac{\sqrt{C^2 - \frac{R-Q}{P-Q} B^2 sn^2 amu}}{\varphi^2 \sqrt{P(R-P)}},$$

$$r = \frac{B\sqrt{1 - sn^2 am u}}{\varphi^2 \sqrt{R(R-P)}},$$

или въ силу формулы 10):

$$\gamma)\ p = \frac{C}{\sqrt{P(R-P)}} \frac{dn.am u}{\varphi^2},$$

$$\delta)\ r = \frac{B}{\sqrt{R.(R-P)}} \frac{cs.am u}{\varphi^2}.$$

Мы видимъ, что величины p, q и r выражаются чрезъ эллиптическія функціи величины u, опредѣляемой формулой 12).

Если бъ имѣло мѣсто неравенство:

$$\lambda^2 < \mu^2,$$

то, какъ легко видѣть, уравненія 12), β), γ) и δ) сохранили бы свой видъ; измѣнились бы лишь постоянные коэффиціенты, въ нихъ входящіе.

Наконецъ, если

$$\lambda = \mu,$$

то уравненіе 11) приметъ видъ:

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{C\sqrt{(Q-P)}}{\sqrt{PQR}} \int_{t_0}^t \frac{dt}{\varphi^2} = u,$$

откуда

$$\frac{1}{2} ly \frac{1+x}{1-x} = u;$$

слѣдовательно,

$$x = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1} = Th.u.$$

Опредѣляя, какъ и выше, величины p, q и r, легко найдемъ:

$$\beta')\ q = \frac{B}{\sqrt{Q(Q-P)}} \cdot \frac{Th.u}{\varphi^2},$$

$$\gamma') \ p = \frac{C}{\sqrt{P(R-P)}} \cdot \frac{1}{\varphi^2 Ch.u},$$

$$\delta') \ r = \frac{B}{\sqrt{R(R-P)}} \ \frac{1}{\varphi^2 Ch.u}.$$

Такимъ образомъ въ этомъ частномъ случаѣ величины p, q, r выражаются чрезъ гиперболическія функціи отъ u.

Чтобы покончить съ вопросомъ объ опредѣленіи величинъ p, q и r, намъ остается выразить условіе

$$\lambda^2 \gtrless \mu^2,$$

чрезъ постоянныя P, Q, R, G_1 и G_2.

Изъ формулъ 8) слѣдуетъ:

$$\lambda^2 - \mu^2 = \frac{Q(Q-P)}{B^2} - \frac{Q(R-Q)}{C^2} = \frac{Q[Q(C^2+B^2)-PC^2-RB^2]}{B^2C^2}.$$

Но формулы 5) даютъ:

$$C^2+B^2 = G_2^{\ 2}(R-P), \ RB^2+PC^2 = G_1^{\ 2}(R-P),$$

въ силу чего

$$\lambda^2 - \mu^2 = \frac{Q(R-P)}{C^2B^2}(QG_2^{\ 2} - G_1^{\ 2}).$$

Мы видимъ, чтó условіе $\lambda^2 \gtrless \mu^2$ эквивалентно условію:

$$QG_2^{\ 2} - G_1^{\ 2} \gtrless 0.$$

Для окончательнаго рѣшенія задачи Poinsot нужно опредѣлить величины a_i, b_i, c_i $(i=1,2,3)$, опредѣляющія положеніе осей инерціи x, y, z тѣла относительно неподвижныхъ осей координатъ. Но предварительно укажемъ нѣкоторыя геометрическія и механическія особенности разсматриваемаго движенія.

Для этого обратимся къ уравненіямъ 2) и 3):

$$2)\quad P^2q^2+Q^2q^2+R^2r^2=\frac{G_1{}^2}{\varphi^4},$$

$$3)\quad Pp^2+Qq^2+Rr^2=\frac{G_2{}^2}{\varphi^4}.$$

Если мы снова введемъ величины

$$P'=P.\varphi^2,\ Q'=Q.\varphi^2,\ R'=R.\varphi^2\ (\S\ \text{II, форм. } 10),$$

то наши уравненія примутъ видъ:

$$2')\quad P'^2p^2+Q'^2q^2+R'^2r^2=G_1{}^2.$$

$$3')\quad \varphi^2(P'p^2+Q'q^2+R'r^2)=G_2{}^2.$$

Мы видѣли (§ II), что величины $P'p$, $Q'q$ и $R'r$ равны слагающимъ параллельно осямъ инерціи мгновенной пары вращенія (G_3).

Уравненіе 2') показываетъ, слѣдовательно, что *моментъ G_3 послѣдней не измѣняется и равенъ G_1*.

Пусть ω—скорость вращенія, слагающія которой равны p, q и r.

Если i—уголъ, образуемый направленіями ω и G_3, то, какъ легко видѣть, множитель при φ^2 въ лѣвой части уравненія 3') представляетъ геометрическое произведеніе $G_1 \omega csi$ величинъ G_1 и ω.

Но моментъ G_1 не измѣняется; слѣдовательно, *проекція угловой скорости на направленіе оси момента мгновенной пары вращеніе измѣняется обратно пропорціонально квадрату линейнаго расширенія тѣла*.

Построимъ въ моментъ t центральный эллипсоидъ.

$$Px^2+Qy^2+Rz^2=H$$

въ его начальной фазѣ. Здѣсь H—постоянная величина. Пусть ϱ—радіусъ эллипсоида, служащій осью вращенія $\omega(p,\ q,\ r)$, α, β, γ — косинусы угловъ, образуемыхъ прямой ϱ съ глав-

ными осями инерціи x, y, z. По предположенію,

$$\alpha=\frac{p}{\omega},\quad \beta=\frac{q}{\omega},\quad \gamma=\frac{r}{\omega}.$$

Но, если x, y, z—координаты конца линіи ϱ, то

$$\alpha=\frac{x}{\varrho},\quad \beta=\frac{y}{\varrho},\quad \gamma=\frac{z}{\varrho};$$

слѣдовательно,

$$p=\frac{\omega}{\varrho}x,\quad q=\frac{\omega}{\varrho}y,\quad r=\frac{\omega}{\varrho}z.$$

Внесемъ эти значенія въ уравненія 2) и 3). Это даетъ

$$\varepsilon)\quad \begin{cases} P^2x^2+Q^2y^2+R^2z^2=G_1^{\,2}\dfrac{\varrho^2}{\omega^2\varphi^4} \\ Px^2+Qy^2+Rz^2=G_2^{\,2}\dfrac{\varrho^2}{\omega^2\varphi^4}=H, \end{cases}$$

въ силу уравненія эллипсоида

Но, если K—длина перпендикуляра, опущеннаго изъ центра инерціи на плоскость, касательную къ эллипсоиду въ точкѣ (x, y, z), то по извѣстной формулѣ

$$\frac{1}{K^2}=\frac{P^2x^2+Q^2y^2+R^2z^2}{H^2}=\frac{G_1^{\,2}}{H^2}\frac{\varrho^2}{\omega^2\varphi^2}=\frac{G_1^{\,2}}{HG_2^{\,2}},$$

въ силу послѣднихъ уравненій.

Итакъ разстояніе k *центра инерціи отъ плоскости, касательной къ центральному эллипсоиду въ точкѣ пересѣченія послѣдняго съ осью вращенія, остается неизмѣннымъ во все время движенія.*

Мы нашли такимъ образомъ снова всѣ важнѣйшіе результаты второй части настоящаго труда. Замѣтимъ въ заключеніе, что *прямыя тѣла, служащія послѣдовательными осями угловой скорости* ω, *суть производящія конуса втораго порядка:*

$$\frac{P^2x^2+Q^2y^2+R^2z^2}{Px^2+Qy^2+Rz^2}=\frac{G_1^{\,2}}{G_2^{\,2}},$$

уравненіе котораго получается изъ уравненій ε) по раздѣленіи перваго изъ нихъ на второе.

Этотъ конусъ обращается въ двѣ плоскости:

$$Rz^2(R-Q)=Px^2(Q-P),$$

если

$$G_1^{\,2}=QG_2^{\,2}.$$

Это слѣдуетъ также изъ формулъ γ') и δ'), которыя имѣютъ мѣсто въ этомъ случаѣ.

Перейдемъ къ опредѣленію величинъ a_i, b_i, c_i. Для этого обратимся къ системѣ уравненій E_1).

Изъ нихъ слѣдуетъ, что величины S_1, S_2 и S_3 не зависятъ отъ времени. Но эти величины равны слагающимъ момента G_1 мгновенной пары вращенія параллельно неподвижнымъ осямъ координатъ. Отсюда мы прежде всего заключаемъ:

$$S_1^{\,2}+S_2^{\,2}+S_3^{\,2}=G_1^{\,2},$$

а также что *моментъ* G_1 *сохраняетъ не только свою величину, но и направленіе.*

Для опредѣленія 9 величинъ a_i, b_i и c_i у насъ есть 6 уравненіи 2) и 3) § II и 3 уравненія 17) того же параграфа, которыя могутъ быть представлены въ такомъ видѣ:

$$17')\quad\left\{\begin{aligned}\frac{S_1}{\varphi^2}&=a_1Pp+a_2Qq+a_3Rr,\\ \frac{S_2}{\varphi^2}&=b_1Pp+b_2Qq+b_3Rr,\\ \frac{S_3}{\varphi^2}&=c_1Pp+c_2Qq+c_3Rr.\end{aligned}\right.$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

$$\frac{S_1^{\,2}+S_2^{\,2}+S_3^{\,2}}{\varphi^4}=P^2p^2+Q^2q^2+R^2r_2=\frac{G_1^{\,2}}{\varphi^4},$$

въ силу уравненія 2). Отсюда снова получаемъ:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = G_1^2.$$

Такъ какъ входящія въ 17') величины p, q, r и φ извѣстны, то опредѣленіе величинъ a_i, b_i и c_i есть лишь вопросъ алгебрическихъ передѣлокъ. Для случая твердаго тѣла, когда въ лѣвыя части уравненій 17') величина φ не входитъ, вопросъ этотъ рѣшенъ. Не желая напрасно увеличивать объемъ своего труда, я отсылаю читателя къ сочиненіямъ по механикѣ твердаго тѣла [1]).

§ IV. Движеніе свободнаго тѣла подъ дѣйствіемъ непрерывныхъ силъ.

Интегрированіе основныхъ уравненій динамики подобно-измѣняемаго тѣла возможно лишь въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ. Одинъ изъ нихъ мы только что изслѣдовали. Здѣсь мы разсмотримъ еще два другихъ случая.

Случай свободнаго тяжелаго тѣла. Сохранимъ всѣ обозначенія предыдущаго параграфа. Пусть g—ускореніе силы тяжести. Если m—масса точки (x, y, z) тѣла, то сила P, дѣйствующая на точку, равна mg. Пусть слагающія параллельно неподвижнымъ осямъ координатъ ускоренія g равны g_1, g_2 и g_3. Въ такомъ случаѣ

$$X' = mg_1, \quad Y' = mg_2, \quad Z' = mg_3,$$

и

$$\mathbf{X} = a_1 mg_1 + b_1 mg_2 + c_1 mg_3,$$

$$\mathbf{Y} = a_2 mg_1 + b_2 mg_2 + c_2 mg_3,$$

$$\mathbf{Z} = a_3 mg_1 + b_3 mg_2 + c_3 mg_3,$$

какъ это слѣдуетъ изъ формулъ 16) § II.

---

[1]) *Kirchhoff* l. c. стр. 67—68 и стр. 43—44.
Schell l. c. t. II, стр. 441—442.

Эти формулы даютъ:

$$1)\left\{\begin{aligned} \Sigma X &= M(a_1 g_1 + b_1 g_2 + c_1 g_3) \\ \Sigma J &= M(a_2 g_1 + b_2 g_2 + c_2 g_3) \\ \Sigma Z &= M(a_3 g_1 + b_3 g_2 + c_3 g_3) \end{aligned}\right\} \quad M\text{—масса тѣла;}$$

$$\Sigma(Xx + Yy + Zz) = (a_1 g_1 + b_1 g_2 + c_1 g_3)\Sigma mx +$$

$$+ (a_2 g_1 + b_2 g_2 + c_2 g_3)\Sigma my + (a_3 g_1 + b_3 g_3 + c_3 g_3)\Sigma mz.$$

$$\Sigma(yZ - zY) = (a_3 g_1 + b_3 g_2 + c_3 g_3)\Sigma my - (a_2 g_1 + b_2 g_2 + c_2 g_3)\Sigma mz,$$

$$\Sigma(zX - xZ) = (a_1 g_1 + b_1 g_2 + c_1 g_3)\Sigma mz - (a_3 g_1 + b_3 g_2 + c_3 g_3)\Sigma mx,$$

$$\Sigma(xY - yX) = (a_2 g_1 + b_2 g_2 + c_2 g_3)\Sigma mx - (a_1 g_1 + b_1 g_2 + c_1 g_3)\Sigma my,$$

Но началомъ координатъ x, y, z служитъ центръ инерціи, слѣдовательно:

$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = o,$$

откуда

$$2)\ \Sigma(Xx + Yy + Zz) = \Sigma(yZ - zY) = \Sigma(zX - xZ) = \Sigma(xY - yX) = o.$$

Кромѣ того, если умножимъ формулы 1) сначала на a_1, a_2, a_3, затѣмъ на b_1, b_2, b_3 и наконецъ на c_1, c_2, c_3 соотвѣтственно, то, складывая каждый разъ произведенія, найдемъ въ силу соотношеній 2 и 3 § II между величинами a_i, b_i, c_i:

$$3)\left\{\begin{aligned} a_1 \Sigma X + a_2 \Sigma Y + a_3 \Sigma Z &= M g_1, \\ b_1 \Sigma X + b_2 \Sigma Y + b_3 \Sigma Z &= M g_2, \\ c_1 \Sigma X + c_2 \Sigma Y + c_3 \Sigma Z &= M g_3. \end{aligned}\right.$$

Основныя уравненія A_1). C_1), D_1), E'_1) и E_1 будутъ, слѣдовательпо:

$$A_1)\ \frac{d^2 x_0}{dt^2} = g_1,\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = g_2,\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} = g_3.$$

$$C_1)\ T=T_0;\ D_1)\ \Pi\frac{d^2\varphi^2}{dt^2}=4T_0,$$

$$E'_1)\left\{\begin{aligned}&\frac{d(P'p)}{dt}=(Q'-R')qr,\\&\frac{d(Q''q)}{dt}=(R'-'P)rp,\\&\frac{d(R'r)}{dt}=(P'-Q')pq,\end{aligned}\right.$$

$$E_1)\ \frac{dS_1}{dt}=0,\ \frac{dS_2}{dt}=0,\ \frac{dS_3}{dt}=0.$$

Изъ A_1) вытекаетъ:

$$x_0=\frac{1}{2}g_1t^2+m_1t+n_1,$$

$$y_0=\frac{1}{2}g_2t^2+m_2t+n_2,$$

$$z_0=\frac{1}{2}g_3t^2+m_3t+n_3.$$

Изъ этихъ формулъ легко получаемъ:

$$m_2(x_0-n_1)-m_1(y_0-n_2)=-\frac{1}{2}(m_1g_2-m_2g_1)t^2,$$

$$g_2(x_0-n_1)-g_1(y_0-n_2)=+(m_1y_2-m_2g_1)t,$$

$$m_3(y_0-n_2)-m_2(z_0-n_3)=-\frac{1}{2}(m_2g_3-m_3g_2)t^2.$$

Первыя два уравненія даютъ:

$$\alpha)\ [g_2(x_0-n_1)-g_1(y_0-n_2)]^2+2(m_1g_2-m_2g_1)[m_2(x_0-n_1)-$$
$$-m_1(y_0-n_2)]=0,$$

Изъ перваго и третьяго получаемъ:

$$\beta)\quad \frac{m_2(x_0-n_1)-m_1(y_0-u_2)}{m_3(y^0-n_2)-m_2(z_0-u_3)}=\frac{m_1g_2-m_2g_1}{m_2g_3-m_3g_2}.$$

Это уравненіе показываетъ, что *траекторія центра инерціи есть плоская кривая*. Изъ уравненія α) слѣдуетъ, что *эта траекторія—парабола*, такъ какъ α) есть уравненіе цилиндра, производящія котораго параллельны оси z', а основаніемъ служитъ парабола.

Нетрудно было бы доказать, что плоскость α) параллельна направленію силы тяжести. Но на этомъ останавливаться не будемъ.

Что касается остальныхъ уравненій C_1), D_1), E_1) и E'_1), то они въ данномъ случаѣ тожественны съ аналогичными уравненіями § III. Слѣдовательно, всѣ сдѣланныя въ послѣднемъ изслѣдованія относительно величинъ φ, p, q, r, a_i, b_i, c_i вполнѣ сохраняютъ свое значеніе и въ настоящемъ случаѣ.

Случай центральныхъ силъ. Положимъ, что непрерывныя силы P дѣйствуютъ на точки (x, y, z) тѣла вдоль прямыхъ ϱ, соединяющихъ эти точки съ центромъ инерціи, причемъ

$$P=-\varkappa^2 m\varrho.$$

гдѣ m—масса точки (x, y, z), $\varkappa$—величина, одинаковая для всѣхъ точекъ тѣла. Изъ выраженія силы P слѣдуетъ:

$$X=-\varkappa^2 mx,\ \ Y=-\varkappa^2 my,\ \ Z=-\varkappa^2 mz,$$

откуда

$$\Sigma X=-\varkappa^2\Sigma mx,\ \ \Sigma Y=-\varkappa^2\Sigma my,\ \ \Sigma Z=-\varkappa^2\Sigma mz,$$

или, такъ какъ началомъ координатъ служитъ центръ инерціи,

$$\Sigma X=\Sigma Y=\Sigma Z=0.$$

Далѣе, въ силу предыдущихъ значеній слагающихъ X, Y и Z,

$$\Sigma(yZ-zY)=\Sigma(zX-xZ)=\Sigma(xY-yX)=0,$$

$$\Sigma(Xx+Yy+Zz)=-\varkappa^2\Sigma m(x^2+y^2+z^2)=-\varkappa^2\Sigma m\varrho^2.$$

Но, если Π—начальное значеніе главнаго полярнаго момента инерціи, то, какъ извѣстно,

$$\Sigma m\varrho^2 = \Pi\varphi^2;$$

слѣдовательно,

$$\Sigma(Xx + Yy + Zz) = -\Pi\varkappa^2\varphi^2.$$

Основныя уравненія § II по внесеніи всѣхъ этихъ значеній примутъ слѣдующій видъ:

$$A_1)\ \frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{d^2y_0}{dt^2} = \frac{d^2z_0}{dt^2} = 0,$$

$$C_1)\ T = -\Pi\int_{t_0}^{t}\varkappa^2\varphi^2\eta\,dt + T_0$$

$$D_1)\ \frac{d^2\varphi^2}{dt^2} = -2\varkappa^2\varphi^2 - 4\int_{t_0}^{t}\varkappa^2\varphi^2\eta\,dt + 4\,\frac{T_0}{\Pi},$$

$$E'_1)\ \frac{d(P'p)}{dt} = (Q'-R')qr,\ \frac{d(Q'q)}{dt} = (R'-P')rp,\ \frac{d(R'r)}{dt} = (P'-Q')pq,$$

$$E_1)\ \frac{dS_1}{dt} = \frac{dS_2}{dt} = \frac{dS_3}{dt} = 0.$$

Уравненія A_1), E_1) и E'_1) тожественны въ данномъ случаѣ съ аналогичными уравненіями задачи *Poinsot*. Мы можемъ, слѣдовательно, ограничиться изслѣдованіемъ уравненій C_1) и D_1).

Пользуясь извѣстной формулой:

$$\eta = \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt},$$

мы представимъ эти уравненія въ слѣдующемъ видѣ:

$$1)\ T - T_0 = -\Pi\int_{\varphi_0}^{\varphi}\varkappa^2\varphi\,d\varphi$$

$$2)\ \frac{d^2\varphi^2}{dt} = -2\varkappa^2\varphi^2 - 4\int_{\varphi_0}^{\varphi}\varkappa^2\varphi\,d\varphi + \frac{4T_0}{\Pi}.$$

Здѣсь φ_0—начальное значеніе величины φ. Эти уравненія легко интегрировать въ томъ случаѣ, когда $\varkappa$—данная функція отъ φ. Въ самомъ дѣлѣ, полагая:

$$3) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varkappa^2 \varphi d\varphi = F(\varphi) - F(\varphi_0), m = T_0 + \Pi F(\varphi_0), n = 4\left[\frac{T_0}{\Pi} + F(\varphi_0)\right],$$

получимъ:

$$4) \begin{cases} T = -\Pi F(\varphi) + m, \\ \frac{d^2\varphi^2}{dt^2} = -2\varkappa^2\varphi^2 - 4F(\varphi) + n. \end{cases}$$

Умножимъ обѣ части послѣдняго уравненія на $2\ \frac{d\varphi^2}{dt} =$

$4\varphi\ \frac{d\varphi}{dt}$. Въ силу тожества

$$2\frac{d.\varphi^2}{dt}\frac{d^2\varphi^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d.\varphi^2}{dt}\right)^2,$$

найдемъ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d.\varphi^2}{dt^2}\right)^2 = -8\varkappa^2\varphi^3\ \frac{d\varphi}{dt} - 16F(\varphi)\varphi\ \frac{d\varphi}{dt} + 4n\varphi\frac{d\varphi}{dt}.$$

Интегрированіе этого уравненія даетъ:

$$\left(\frac{d.\varphi^2}{dt}\right)^2 = -8\int_{\varphi_0}^{\varphi}\varkappa^2\varphi^3 d\varphi - 16\int_{\varphi_0}^{\varphi} F(\varphi)\varphi d\varphi + 2n\varphi^2 + s,$$

гдѣ s—новая произвольная постоянная. Отсюда легко выводимъ:

$$\frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{s + 2n\varphi^2 - 8\int_{\varphi_0}^{\varphi}\varkappa^2\varphi^3 d\varphi - 16\int_{\varphi_0}^{\varphi} F(\varphi)\varphi d\varphi}} = \frac{1}{2}\,dt;$$

слѣдовательно,

$$5)\ \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{s + 2n\varphi^2 - 8\int_{\varphi_0}^{\varphi} \varkappa^2\varphi^3 d\varphi - 16\int_{\varphi_0}^{\varphi} F(\varphi)\varphi d\varphi}} = \frac{1}{2}(t - t_0),$$

гдѣ t_0—соотвѣтствующее φ_0 значенiе времени t. Мы видимъ, что, *если* $\varkappa$—*цѣлая функцiя отъ величины* φ, *то послѣдняя есть абелева функцiя отъ времени.*

Разсмотримъ въ заключенiе простѣйшiй частный случай, когда $\varkappa$—постоянная величина. Въ этомъ предположенiи.

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \varkappa^2\varphi d\varphi = F(\varphi) - F(\varphi_0) = \frac{\varkappa^2}{2}(\varphi^2 - \varphi_0^2);$$

слѣдовательно,

$$F(\varphi) = \frac{\varkappa^2}{2}\varphi^2, \quad F(\varphi_0) = \frac{\varkappa^2}{2}\varphi_0^2.$$

Далѣе

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \varkappa^2\varphi^3 d\varphi = \frac{\varkappa^2}{4}(\varphi^4 - \varphi_0^4); \int_{\varphi_0}^{\varphi} F(\varphi)\varphi d\varphi = \frac{\varkappa^2}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \varphi^3 d\varphi = \frac{\varkappa^2}{8}(\varphi^4 - \varphi_0^4)$$

Вставляя эти значенiя въ уравненiе 5), найдемъ:

$$6)\ \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{s_1 + 2n\varphi^2 - 4\varkappa^2\varphi^4}} = \frac{1}{2}(t - t_0),$$

гдѣ

$$s_1 = s + 4\varkappa^2\varphi_0^4.$$

Уравненiе 6) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$7)\ \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d.\varphi^2}{\sqrt{s_2 - \left(2\varkappa\varphi^2 - \frac{n}{2\varkappa}\right)^2}} = t - t_0,$$

гдѣ для краткости положено:

$$s_2 = s_1 + \frac{n^2}{4\varkappa^2}.$$

Мы видимъ, что, если величина s_2 отрицательна, то φ— комплексная функція отъ времени. Пусть, слѣдовательно,

$$s_2 = +a^2.$$

Уравненіе 7) даетъ въ этомъ случаѣ:

$$\Big|_{\varphi_0}^{\varphi} arcsn\left(\frac{4\varkappa^2\varphi^2 - n}{2a\varkappa}\right) = 2\varkappa(t - t_0),$$

откуда

$$8)\quad 4\varkappa^2\varphi^2 - n = 2a\varkappa sn(2\varkappa t + l),$$

гдѣ

$$l = arcsn\frac{4\varkappa\varphi_0^2 - n}{2a\varkappa} - 2\varkappa t_0.$$

Мы видимъ, что *въ этомъ случаѣ тѣло періодически расширяется и сжимается*. Періодъ расширенія и сжатія равенъ $\frac{\pi}{\varkappa}$. Обратимся къ выраженію 4) живой силы. Внеся, вмѣсто $F(\varphi)$, найденное выше значеніе $\frac{\varkappa}{2}\varphi^2$, получимъ:

$$T = m - \frac{\varkappa\Pi}{2}\varphi^2 = m - \frac{n\Pi}{8\varkappa} - \frac{a\Pi}{4}sn(2\varkappa t + l),$$

въ силу формулы 8). Мы видимъ, что *живая сила тѣла также періодически измѣняется съ тѣмъ же періодомъ* $\frac{\pi}{\varkappa}$.

§ V. Обзоръ литературы.

Въ заключеніе настоящаго труда сдѣлаемъ краткій обзоръ литературы интересующей насъ области механики, причемъ отдѣльно разсмотримъ работы по кинематикѣ и статикѣ.

Важнѣйшія изслѣдованія въ области кинематики принадлежатъ Chasles'ю, Grouard'у и Burmester'у.

Въ небольшей статьѣ [1]) перваго изъ этихъ авторовъ (1830 г.) мы находимъ теорему, капитальное значеніе которой выяснилось лишь далеко позже. Теорема эта устанавливаетъ существованіе двойной прямой и перпендикулярной къ ней двойной плоскости для двухъ подобныхъ между собой фигуръ, какъ угодно лежащихъ въ пространствѣ. Это свойство заключаетъ въ себѣ всѣ геометрическія особенности двухъ подобныхъ фигуръ и, будучи развито, легко приводитъ къ основнымъ теоремамъ кинематики подобно-измѣняемаго тѣла.

Вслѣдъ за статьей Chasles'я появляются небольшія изслѣдованія частнаго характера, принадлежащія Petersen'у, Durand'у, Wiener'у и др. Эти работы имѣютъ скорѣе геометрическій интересъ. Первое развитіе работы Chasles'я было дано Grouard'омъ [2]) Онъ подробно изслѣдовалъ (1865 и 1870 г.) плоское движеніе плоской подобно-измѣняемой фигуры. Имъ снова доказано существованіе мгновеннаго центра, а также теорема, по которой въ каждый моментъ движенія скорости точекъ фигуры образуютъ одинаковые углы съ прямыми, соединяющими эти точки съ мгновеннымъ центромъ. Далѣе Grouard'омъ дана теорія ускореній плоскаго движенія, теорія центровъ кривизны, а также установлена аналогія этого вопроса и движенія неизмѣняемой плоской фигуры.

Перехожу теперь къ работамъ Burmester'а [3]). Большая часть ихъ относится къ кинематикѣ измѣняемыхъ системъ болѣе общаго вида, чѣмъ подобно-измѣняемая. Для послѣдней важны двѣ его статьи. Въ первой (1874 г.) разсматривается плоское движеніе; во второй (1878 г.)—движеніе въ пространствѣ. Особенно интересна вторая работа въ виду крайней общности полученныхъ результатовъ и оригинальнаго метода доказательствъ. Достаточно сказать, что авторомъ дана полная теорія скоростей и ускореній всѣхъ порядковъ, охватывающая одновременно неизмѣняемую, подобно-измѣняемую и однородно-измѣняемую системы точекъ.

---

[1]) См. ниже указатель литературы.

[2]) Тоже.

[3]) Тоже.

Не менѣе замѣчателенъ методъ, которымъ пользуется авторъ. Этотъ методъ построенъ на слѣдующей теоремѣ:

Если мы раздѣлимъ въ одинаковомъ отношеніи прямыя, соединяющія гомологичныя точки двухъ аффинныхъ, подобныхъ или котруэнтныхъ фигуръ, то точки дѣленія образуютъ фигуру, аффиную первымъ двумъ.

Отсюда легко вывести основную теорему кинематики: *Концы одновременныхъ скоростей точекъ неизмѣняемой, подобно и однородно (аффинно)—измѣняемой системы образуютъ аффиную фигуру.*

Эта теорема, справедливая и для ускореній всѣхъ порядковъ, заключаетъ въ себѣ всю теорію скоростей и ускореній. Вотъ важнѣйшіе результаты.

1) Направленія скоростей и ускореній образуютъ линейный комплектъ втораго порядка и класса.

2) Геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ одинаковыя скорости, или ускоренія есть поверхность эллипсоида.

Кромѣ указанныхъ, капитальныхъ изслѣдованій по кинематикѣ подобно-измѣняемаго тѣла, существуетъ цѣлый рядъ работъ, изъ которыхъ наиболѣе интересныя принадлежатъ Geisenheimer'у [1]) и П. Сомову [2]). Оба автора разсматриваютъ плоское движеніе. Первый изъ нихъ пользуется геометрическимъ методомъ, замѣчательнымъ по простотѣ и изяществу. Въ его работѣ мы находимъ, прежде всего, полную теорію двухъ и трехъ подобныхъ между собою фигуръ, лежащихъ въ одной и той же плоскости. Далѣе авторъ продолжаетъ работу Grouard'а относительно центровъ кривизны траекторій, распространяя на подобно-измѣняемую систему формулу Savary, результаты Gilbert'а и т. д.

Въ сочиненіи Сомова разработана аналитически плоская кинематика, причемъ интересна (гл. VI) попытка автора обобщить для подобно-измѣняемой системы сложеніе вращеній. Онъ строитъ различными способами центръ составнаго движенія и опредѣляетъ послѣднее. Къ сожалѣнію, то обстоятельство, что авторомъ не выдѣлено изъ общаго движенія лучистое расширеніе, лишаетъ его результаты простоты и значенія для кинематики трехъ измѣреній.

---

[1]) См. ниже указатель литературы.

[2]) Тоже.

По статикѣ подобно-измѣняемаго тѣла имѣются лишь 2 работы Möbius'а [1]) и одна—автора настоящаго труда [2]). Въ своемъ учебникѣ статики Möbius разбираетъ условія равновѣсія плоской системы силъ, дѣйствующихъ на точки подобно-измѣняемой системы, лежащей въ той же плоскости. Во второй статьѣ авторъ, исходя изъ принципа Бернулли, выводитъ снова условія равновѣсія плоской системы силъ, а затѣмъ переходитъ къ системѣ силъ, дѣйствующихъ въ пространствѣ на точки подобно-измѣняемой системы. Кромѣ условій равновѣсія, мы находимъ (§ 6) разборъ любопытнаго частнаго случая четырехъ силъ. Оказывается, что здѣсь къ условіямъ, имѣющимъ мѣсто въ случаѣ твердаго тѣла, присоединяется еще то, что плоскости, проведенныя чрезъ точки приложенія силъ перпендикулярно къ направленіямъ послѣднихъ, должны пересѣкаться въ одной точкѣ.

Основанія, на которыхъ построена третья работа, и важнѣйшие результаты изложены въ § 2 второй части настоящаго сочиненія. Отсылая къ этому § читателя, мы ограничимся здѣсь замѣчаніемъ, что въ третьемъ выпускѣ нашей „Статики" распространена на подобно-измѣняемую систему теорія винтовъ Ball'я.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ.

Chasles. Note sur les propriétés générales de deux corps semblables eutre eux et placés d'une manière quelconque dans l'espace etc. *Bulletin des sciences mathématiques de Férussac.* Nov. 1830.

Möbius. Lehrbuch der Statik. 1837. § 234—236.

— *Journal von Crelle.* 1840. B. 21.

Grouard. Figures semblables. L'Institut. 1865.

Petersen. Nouvelles Annales de Mathématiques. Questions. 1866.

Durand. Ibidem. Solutions des questions. 1867.

Wiener Sul moto di una figura piana etc. *Annali di mathematica pura ed applicata.* Seria II, t. I. 1867—68.

---

[1]) См. ниже указатель литературы.

[2]) Тоже.

Grouard. Figures semblambles. *L'Institut*. 1869.
— — — 1870.
— Sur les figures semblables. *Bulletin de la Société Philomatique* X. 1873.
— Sur le mouvement etc. *Ibidem*.
Burmester. Kinematisch-geometrische Untersuchung der Bewegung ähulich-veränderlicher ebener Systeme. *Zeitschrift fur Mathematik und Physik*. 1874. t. 20.
Müller. Ueber Selbsthüllcurven und Selbsthüllflâchen etc. *Ibid*. 1875. t. 22.
Burmester. Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung etc. *Ibidem*. 1878, t. 23.
— Ueber den Beschleunigungszustand ähnlich-veränderlicher und starrer ebener Systeme. *Civilingenieur*, 1878, t. 24.
Geisenheimer. Untersuchung der Bewegung ähnlich-veranderlicher Systeme. *Zeitschrift für Mathem. und Physik*. 1879, t. 24.
Formenti. Movimento delle figure, che si mantengono simili a se stesse. *Giornale mathematische, Battaglini*. 1879, t. 17.
Fouret. Sur le mouvement d'un corps etc. *Comptes rendues*. 1879, t. 88.
Schumann. Beiträge zur Theorie der Bewegung ahnlich-veränderlicher Systeme. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. 1881, t. 26.
Mehmke. Ueber die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnungen ähnlich-veränderlicher Systeme. *Civilingenieur*. 1883, t. 29.
П. Сомовъ. Кинематика подобно - измѣняемой системы двухъ измѣреній. *СПб*. 1885.
Burmester. Kinematik. 1888.
Д. Н. Зейлигеръ. Механика подобно - измѣняемой системы. 3 вып. Одесса 1890—91 г.
— Изъ области геометріи и механики. Одесса. 1891.

Оглавленіе.

Часть I. Кинематика.

§ I. Опредѣленіе. Основныя свойства движенія . . . 7
§ II. Возможныя движенія подобно-измѣняемаго тѣла. 8
§ III. Сложеніе движеній 12
§ IV. Движеніе тѣла, имѣющаго неподвижную точку. 18
§ V. Общее движеніе подобно-измѣняемаго тѣла . . 20
§ VI. Теорія скоростей. 22

Часть II. Динамика.

Геометрическая теорія.

§ I. Теорія моментовъ инерціи 28
§ II. Основанія статики подобно-измѣняемаго тѣла . 32
§ III. Теорія мгновенныхъ силъ. 34
§ IV. Рѣшеніе задачи Poinsot для подобно-измѣняемаго тѣла. 45

Часть III. Динамика.

Аналитическая теорія.

§ I. Основныя уравненія движенія 65
§ II. Преобразованіе основныхъ уравненій 69
§ III. Задача Poinsot 83
§ IV. Частные случаи движенія. 93
§ V. Обзоръ литературы 100
Указатель литературы 103

